■ Sisältö
■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ derivaatta, ■ derivointisäännöt

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot, ■ integraalifunktio

---

Luettelo derivaatoista

Seuraava luettelo on siinä määrin keskeinen, että sen hyvä hallinta kuuluu matematiikan opintojen kulmakiviin. Samat kaavat tulevat käyttöön myös integroimiskaavoina, jolloin ne on luettava oikealta vasemmalle.

■ alkeisfunktio

$$\mathrm{D}\,x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,e^x &= e^x, & \mathrm{D}\ln x &= \frac{1}{x},\\
\mathrm{D}\sin x &= \cos x, & \mathrm{D}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\mathrm{D}\cos x &= -\sin x, & \mathrm{D}\arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\mathrm{D}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x, & \mathrm{D}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2},\\
\mathrm{D}\cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x, & \mathrm{D}\,\mathrm{arccot}\, x &= -\frac{1}{1+x^2},\\
\mathrm{D}\sinh x &= \cosh x, & \mathrm{D}\,\mathrm{arsinh}\, x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\\
\mathrm{D}\cosh x &= \sinh x, & \mathrm{D}\,\mathrm{arcosh}\, x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\\
\mathrm{D}\tanh x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x, & \mathrm{D}\,\mathrm{artanh}\, x &= \frac{1}{1-x^2},\\
\mathrm{D}\coth x &= -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1-\coth^2 x, & \mathrm{D}\,\mathrm{arcoth}\, x &= \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

ESITIEDOT: ■ derivaatta, ■ derivointisäännöt
KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot, ■ integraalifunktio

■ Sisältö
■ Hakemisto

Derivaattojen johtamisesta: standardiraja-arvojen käyttö

Edellä olevien derivaattojen johtaminen perustuu derivaatan määritelmään erotusosamäärän raja-arvona, funktioiden standardiraja-arvoihin, osamäärän derivointisääntöön sekä käänteisfunktion derivoimissääntöön.

Suoraan erotusosamäärän raja-arvona ja eräiden standardiraja-arvojen avulla saadaan eksponenttifunktion ja sinifunktion derivaatat:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\,\frac{e^h-1}{h}=e^x;$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin(h/2)}{h/2}=\cos x.$$

Jälkimmäisessä on käytetty myös sopivaa trigonometrian kaavaa.

Potenssin derivoimiskaava yleisessä tapauksessa, so. eksponentin α ollessa mikä tahansa reaaliluku, saadaan helpoimmin eksponenttifunktion avulla:

$$\frac{d}{dx}x^\alpha=\frac{d}{dx}e^{\alpha\ln x}=e^{\alpha\ln x}\,\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Jos α on kokonaisluku tai rationaaliluku, on muitakin tapoja kaavan johtamiseen.

Kosinifunktion derivaatta saadaan palautetuksi edellä johdettuun sinifunktion derivaattaan kirjoittamalla $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$.

Hyperbelisinin ja hyperbelikosinin derivaatat voidaan laskea lausumalla funktiot eksponenttifunktion avulla.

Tangentin ja kotangentin sekä vastaavien hypebolisten funktioiden derivaatat lasketaan lausumalla funktiot sinin ja kosinin, vastaavasti hyperbelisinin ja hyperbelikosinin avulla ja käyttämällä osamäärän derivoimiskaavaa. Vaihtoehtoisten muotojen johtamisessa tarvitaan trigonometrian kaavaa $1=\cos^2 x+\sin^2 x$ ja tämän hyperbolista vastinetta $1=\cosh^2 x-\sinh^2 x$.

■ derivaatta
■ erotusosamäärä
■ raja-arvo (funktion)
■ raja-arvo (standardi-, funktion)
■ derivaatta (osamäärän)
■ derivaatta (käänteisfunktion)
■ eksponenttifunktio
■ sini
■ trigonometria (johdannaiskaavat)
■ potenssifunktio
■ kosini
■ trigonometrinen funktio (symmetria)
■ hyperbelifunktio
■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
■ trigonometria (peruskaavat)
■ hyperbolinen kaava

ESITIEDOT: ■ derivaatta, ■ derivointisäännöt
KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot, ■ integraalifunktio

■ Sisältö
■ Hakemisto

Derivaattojen johtamisesta: käänteisfunktiot

Logaritmifunktion derivaatta saadaan käänteisfunktion derivoimissäännöllä: Jos $y = f(x) = \ln x$ ja tämän käänteisfunktio on $x = g(y) = e^y$, on

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

■ logaritmifunktio
■ derivaatta (käänteisfunktion)

Arcus- ja area-funktioiden derivoimiskaavat saadaan samaan tapaan. Esimerkkinä olkoon $\arcsin$:

■ arcus-funktio
■ area-funktio

Olkoon $y = f(x) = \arcsin x$ ja $x = g(y) = \sin y$, missä $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tällöin on

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$