# Arcus-funktiot


■ Sisältö
■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ trigonometriset funktiot
KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat

---

## Arcus-funktioiden määritelmät

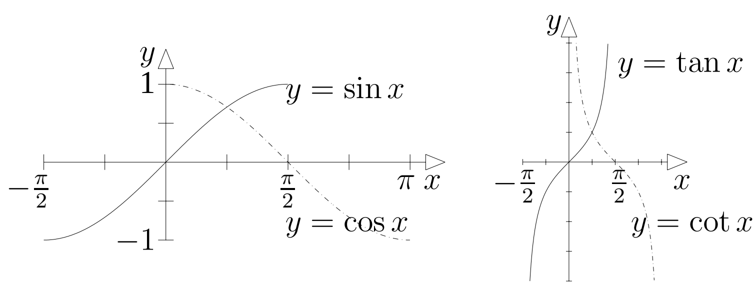
Trigonometriset funktiot eivät sellaisinaan ole bijektioita eikä niillä siis ole käänteisfunktioita. Jos funktioiden määrittelyjoukkoja kuitenkin sopivasti rajoitetaan, saadaan bijektiot. Neljän tärkeimmän funktion osalta on rajoitus tehtävä seuraavasti:

■ bijektio
■ käänteisfunktio
■ käänteisfunktio
■ määrittely-joukko
■ väli (reaaliakselin)

$$\begin{aligned}
\sin :&\quad [-\pi/2,\ \pi/2]\ \to\ [-1,\ 1]\ ;\\
\cos :&\quad [0,\ \pi]\ \to\ [-1,\ 1]\ ;\\
\tan :&\quad ]-\pi/2,\ \pi/2[\ \to\ \mathbb{R}\ ;\\
\cot :&\quad ]0,\ \pi[\ \to\ \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

Täten rajoitettuina funktiot ovat surjektioita, ts. jokainen maalijoukon piste on myös jonkin määrittelyjoukon pisteen kuva. Funktioista $\sin$ ja $\tan$ ovat aidosti kasvavia, $\cos$ ja $\cot$ aidosti väheneviä; jokaiselle maalijoukon pisteelle kuvautuu siis täsmälleen yksi lähtöjoukon piste, jolloin funktiot ovat todellakin bijektioita.

■ surjektio
■ maalijoukko
■ kasvava (funktio)
■ kasvava (funktio)
■ vähenevä (funktio)
■ vähenevä (funktio)
■ lähtöjoukko




Tällöin funktioilla on käänteisfunktiot. Näitä kutsutaan *arcus-funktioiksi* eli *syklometrisiksi funktioiksi* ja merkitään

$$\begin{aligned}
\arcsin :&\quad [-1,\ 1]\ \to\ [-\pi/2,\ \pi/2]\ ;\\
\arccos :&\quad [-1,\ 1]\ \to\ [0,\ \pi]\ ;\\
\arctan :&\quad \mathbb{R}\ \to\ ]-\pi/2,\ \pi/2[\ ;\\
\mathrm{arccot} :&\quad \mathbb{R}\ \to\ ]0,\ \pi[\ .
\end{aligned}$$

Funktioiden nimet luetaan *arkussini*, *arkuskosini*, jne.

Sana *arcus* tarkoittaa kaarta. Radiaaneja käytettäessä kaaren pituus on sama kuin vastaava yksikköympyrän keskuskulma. Merkintä $\alpha = \arcsin y$ on siis ymmärrettävä siten, että kyseessä on sinin arvoa $y$ vastaava kaari eli kulma $\alpha$. Muut arcus-funktioiden nimet vastaavaan tapaan.

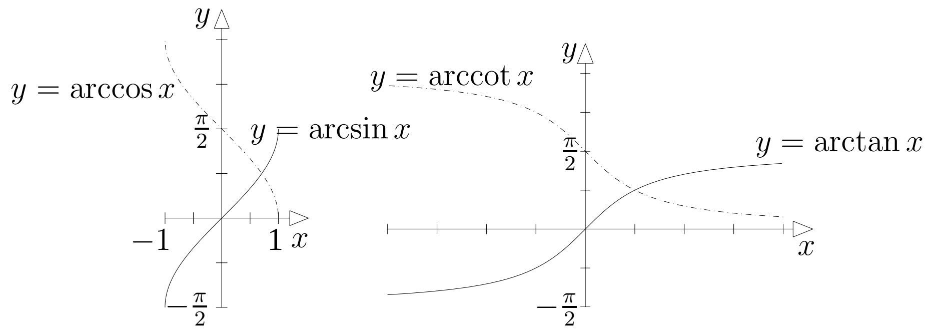
■ radiaani
■ keskuskulma

■ Sisältö
■ Hakemisto

### Arcus-funktioiden kuvaajat; päähaarat ja sivuhaarat

Arcus-funktioiden kuvaajat ovat seuraavat:

■ kuvaaja




Sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin määrittelyjoukkoja voitaisiin tietenkin rajoittaa monella muullakin tavalla, jotta funktioista tulisi bijektioita; esimerkiksi sinin tapauksessa $[\pi/2,\ 3\pi/2] \rightarrow [-1,\ 1]$. Tällöin saatavia käänteisfunktioita kutsutaan arcus-funktioiden *sivuhaaroiksi*. Näiden vastakohtana 'varsinaiset arcus-funktiot' ovat *päähaaroja*.

■ määrittely-joukko
■ bijektio
■ käänteisfunktio
■ käänteisfunktio

Laskimet ja numeeriset tietokoneohjelmat sekä nykyään yleensä myös symboliset (lausekkeita käsittelevät) tietokoneohjelmat tarkoittavat arcus-funktioilla päähaaraa. Joissakin symbolisissa ohjelmissa arcus-funktio saattaa tarkoittaa 'sopivaa' haaraa; vastuu laskuista jää tällöin käyttäjälle. Vanhemmassa kirjallisuudessa funktionnimi ($\arcsin$, jne.) tarkoittaa, että huomioon otetaan kaikki haarat. Jos tarkoitetaan päähaaraa, pannaan viiva nimen päälle: $\overline{\text{arc}}\text{sin}$ tai $\overline{\text{arcsin}}$.

Varsinkin amerikkalainen kirjallisuus merkitsee käänteisfunktion merkintätavan mukaan $\arcsin x = \sin^{-1} x$ jne. Tässä on siis oltava varovainen: Vaikka $\sin^2 x = (\sin x)^2$, niin $\sin^{-1} x = \arcsin x$ eikä suinkaan $1/\sin x$.

■ Sisältö
■ Hakemisto

### Arcus-funktioita koskevia kaavoja

Seuraavassa käsitellään vain arcus-funktioiden päähaaroja.

Käänteisfunktion yleisten ominaisuuksien mukaan on

■ käänteisfunktio
■ käänteisfunktio

$$
\begin{aligned}
\sin(\arcsin y) &= y, & \arcsin(\sin x) &= x;\\
\cos(\arccos y) &= y, & \arccos(\cos x) &= x;\\
\tan(\arctan y) &= y, & \arctan(\tan x) &= x;\\
\cot(\operatorname{arccot} y) &= y, & \operatorname{arccot}(\cot x) &= x.
\end{aligned}
$$

*Tämä edellyttää, että muuttuja $x$ tai $y$ on ao. funktion määrittelyjoukossa* siten kuin edellä on esitetty.

■ määrittely-joukko

Vasemmanpuoliset kaavat ovat sikäli ongelmattomampia, että jos muuttuja $y$ yleensä sijaitsee siten, että arcus-funktio on määritelty, niin kaava on oikea. Oikeanpuolisissa kaavoissa muuttujan $x$ on oltava *rajoitetussa* määrittelyjoukossa eli päähaara-alueella — siis esimerkiksi sinin tapauksessa välillä $[-\pi/2,\ \pi/2]$ — jotta kaava olisi voimassa.

Esimerkiksi $\arcsin(\sin(\pi/6)) = \pi/6$, mutta jos $x = 5\pi/6$, onkin laskettava seuraavasti:

$$\arcsin(\sin(5\pi/6)) = \arcsin(\sin(\pi - 5\pi/6)) = \arcsin(\sin(\pi/6)) = \pi/6.$$

Tässä on käytetty hyväksi sinin symmetriaa: $\sin x = \sin(\pi - x)$.

■ trigonometrinen funktio (symmetria)

Yhdistämällä arcus-funktioita sopivasti saadaan funktioita, joiden kuvaajat saattavat näyttää hieman yllättäviltäkin. Esimerkiksi:

$$f(x) = \arccos(\sin x), \qquad g(x) = \arctan x + \arctan\frac{1-x}{1+x}.$$