■ Sisältö
■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ ympyrä, ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö, ■ toisen asteen pinnat
KATSO MYÖS: ■ pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Laskemisesta ja määrittelystä

Tasokuvioiden pinta-alojen sekä avaruuskappaleiden tilavuuksien ja pinta-alojen laskeminen perustuu suoraviivaisten kuvioiden tai kappaleiden tapauksessa yleensä alkeisgeometrisiin päättelyihin. Käyrien viivojen ja pintojen rajoittamat alat ja tilavuudet lasketaan yleensä integroimalla.

■ pinta-ala (integroimalla)
■ tilavuus (integroimalla)

Käyrän kaarenpituuden, tasokuvion alan, avaruuspinnan alan ja kappaleen tilavuuden käsitteet eivät ole aivan yksinkertaisesti määriteltävissä. Määritelmät perustuvat seuraaviin ideoihin:

■ käyrä (taso-)
■ käyrä (avaruus-)
■ pinta

- Käyrän kaarenpituuden määrittelyssä lähtökohtana on, että janan pituus osataan määrittää. Kaarenpituutta approksimoidaan sijoittamalla käyrälle peräkkäisiä jakopisteitä ja yhdistämällä nämä murtoviivaksi. Tämän pituus voidaan laskea summeeraamalla osajanojen pituudet. Jos murtoviivan pituudella on raja-arvo jakopisteistöä tihennettäessä, se määritellään kaarenpituudeksi.

■ jana
■ etäisyys (pisteiden)
■ raja-arvo (lukujonon)

- Tasokuvion pinta-alan määrittelyn lähtökohtana on, että suorakulmion ala on erisuuntaisten sivujen pituuksien tulo. Kuvion sisään asetetaan suorakulmioita, jotka eivät peitä toisiaan, ja lasketaan näiden yhteinen pinta-ala. Pienin mahdollinen yläraja tällaisten suorakulmiojoukkojen yhteispinta-alalle on tasokuvion pinta-alan sisäapproksimaatio. Samalla tavoin kuvio voidaan peittää suorakulmioilla, jotka eivät peitä toisiaan, ja laskea näiden yhteinen pinta-ala. Suurin alaraja kuviota peittävien suorakulmiojoukkojen pinta-aloille on tasokuvion pinta-alan ulkoapproksimaatio. Jos sisä- ja ulkoapproksimaatio ovat yhtä suuret, yhteistä arvoa kutsutaan kuvion alaksi.

■ suorakulmio
■ pienin yläraja
■ suurin alaraja

- Avaruuskappaleen tilavuus määritellään samaan tapaan kuin tasokuvion pinta-ala, mutta suorakulmioiden sijasta käytetään suorakulmaisia särmiöitä. Tällaisen särmiön tilavuus on samasta kärjestä lähtevien sivujen pituuksien tulo.

■ särmiö (suorakulmainen)

- Avaruudessa olevan pinnan ala voidaan määritellä asettamalla pinnalle jakopisteitä ja yhdistämällä nämä kolmioverkoksi. Jokainen kolmio on tasokuvio ja sen pinta-ala voidaan laskea. Kolmioverkon yhteispinta-ala on approksimaatio avaruuspinnan alalle. Jos jakopisteistöä tihennettäessä yhteispinta-alalla on raja-arvo, tätä kutsutaan avaruuspinnan alaksi.

■ kolmio

Edellä mainittujen raja-arvojen olemassaolo tai sisä- ja ulkoapproksimaatioiden yhtäsuuruus ei ole itsestään selvää. Esimerkeiksi kelpaavat monet fraktaalikuviot.

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ ympyrä, ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö, ■ toisen asteen pinnat
KATSO MYÖS: ■ pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

■ Sisältö
■ Hakemisto

Tasokuviot

Kolmio
ala $= ah/2$; a kanta, h kantaa vastaan kohtisuora korkeus

■ kolmio

Suorakulmio
ala $= ab$; a, b samasta kärjestä alkavien sivujen pituudet

■ suorakulmio

Suunnikas
ala $= ah$; a kanta, h kantaa vastaan kohtisuora korkeus
ala $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ samasta kärjestä alkavat sivuvektorit

■ suunnikas
■ vektoritulo

Puolisuunnikas
ala $= \dfrac{a+b}{2}\,h$; a, b kannat, h näitä vastaan kohtisuora korkeus

■ puolisuunnikas

Ympyrä
kehänpituus $= 2\pi r$; r ympyrän säde
ala $= \pi r^2$; r ympyrän säde

■ ympyrä

Ympyrän sektori
kaarenpituus $= \alpha r$; α keskuskulma radiaaneissa, r säde
ala $= \alpha r^2/2$; α keskuskulma radiaaneissa, r säde
ala $= rs/2$; r säde, s kaarenpituus

■ sektori
■ keskuskulma
■ radiaani

Ympyrän segmentti
vastaava sektori
$-$ vastaava keskuskolmio, jos $0 \le \alpha \le \pi$,
$+$ vastaava keskuskolmio, jos $\pi \le \alpha \le 2\pi$;
α keskuskulma radiaaneissa

■ segmentti

Ellipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
ala $= \pi ab$; a, b ellipsin puoliakselit

■ ellipsi (xy-koordinaateissa)
■ puoliakseli (ellipsin)

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ ympyrä, ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö, ■ toisen asteen pinnat
KATSO MYÖS: ■ pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

■ Sisältö
■ Hakemisto

Kappaleet I

Suorakulmainen särmiö
tilavuus $= abc$; a, b, c samasta kärjestä alkavien särmien pituudet

■ särmiö (suorakulmainen)
■ särmä

Suuntaissärmiö
tilavuus $= Ah$; A pohjan ala, h pohjaa vastaan kohtisuora korkeus
tilavuus $= |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}|$;
$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ samasta kärjestä alkavat särmävektorit

■ särmiö (suuntais-)
■ skalaarikolmitulo

Lieriö, prisma
tilavuus $= Ah$; A pohjan ala, h pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

■ lieriö
■ prisma

Suora ympyrälieriö
tilavuus $= \pi r^2 h$; r pohjaympyrän säde, h korkeus
vaipan ala $= 2\pi rh$; r pohjaympyrän säde, h korkeus

■ ympyrälieriö (suora)

Kartio, pyramidi
tilavuus $= Ah/3$; A pohjan ala,
h pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

■ kartio
■ pyramidi

Suora ympyräkartio
tilavuus $= \pi r^2 h/3$; r pohjaympyrän säde, h korkeus
vaipan ala $= \pi rs$; r pohjaympyrän säde, s sivujana

■ ympyräkartio (suora)

Katkaistu kartio, katkaistu pyramidi
tilavuus $= h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)/3$;
A_1, A_2 pohjien alat,
h pohjia vastaan kohtisuora korkeus

■ kartio (katkaistu)
■ pyramidi (katkaistu)

Katkaistu suora ympyräkartio
tilavuus $= \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3$;
r_1, r_2 pohjaympyröiden säteet, h korkeus
vaipan ala $= \pi(r_1 + r_2)s$;
r_1, r_2 pohjaympyröiden säteet, s sivujana

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ ympyrä, ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö, ■ toisen asteen pinnat
KATSO MYÖS: ■ pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

■ Sisältö
■ Hakemisto

Kappaleet II

Pallo ■ pallo

tilavuus $= 4\pi r^3/3$; r pallon säde
ala $= 4\pi r^2$; r pallon säde

Kalotti, vyöhyke ■ kalotti ■ vyöhyke

ala $= 2\pi rh$; r pallon säde, h kalotin tai vyöhykkeen pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

Pallosektori ■ pallosektori

tilavuus $= 2\pi r^2 h/3$; r pallon säde, h sektoria vastaavan kalotin tai vyöhykkeen pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

Pallosegmentti ■ pallosegmentti

tilavuus $= \pi h^2(r - h/3)$;
r pallon säde, h segmentin pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

Ellipsoidi $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ ■ ellipsoidi

tilavuus $= 4\pi abc/3$; puoliakselit a, b ja c