■ Sisältö
■ Hakemisto

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ polynomit, ■ lukumäärän laskeminen

Kertoma

n ensimmäisen luonnollisen luvun tulo on n-*kertoma*; tätä merkitään huutomerkin avulla:

■ luonnollinen luku

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Lisäksi asetetaan $0! = 1$.

Esimerkiksi $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Kertomafunktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n!$ kasvaa erittäin nopeasti argumentin n kasvaessa. Esimerkiksi

■ funktio

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000,$$

missä on 48 numeroa; $100!$ on suuruusluokaltaan 10^{158}.

Suuria kertomia voidaan arvioida *Stirlingin kaavalla*:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

(James Stirling oli englantilaissyntyinen Venetsiassa toiminut professori, joka julkaisi kaavan vuonna 1730.)

Kertomafunktion yleistyksenä on *gammafunktio* $\Gamma(x)$, joka positiivisilla reaaliarvoilla x määritellään integraalilla

■ funktio (reaali-)
■ määrätty integraali

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

ja jolle pätee $n! = \Gamma(n+1)$, missä n on luonnollinen luku.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: ■ polynomit, ■ lukumäärän laskeminen

■ Sisältö
■ Hakemisto

Binomikertoimet

Binomikertoimeksi kutsutaan lauseketta ■ binomikerroin

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

missä n ja p ovat kokonaislukuja ja $n \geq 0$, $0 \leq p \leq n$.

Kombinatoriselta kannalta kerroin $\binom{n}{p}$ osoittaa, miten monella tavalla n olion joukosta voidaan valita p oliota, ts. montako p-kombinaatiota n oliosta voidaan muodostaa. ■ kombinaatio

Kertoimet esiintyvät myös binomikaavassa ■ binomikaava

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p,$$

jonka avulla voidaan kehittää binomin $x + y$ potenssit. ■ binomi

Näillä kahdella näkökulmalla on selvä yhteys. Binomin potenssi voidaan kirjoittaa

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y),$$

missä tekijöitä $x + y$ on siis n kappaletta.

Summien kertominen voidaan ajatella tapahtuvaksi siten, että poimitaan kaikilla mahdollisilla tavoilla jokaisesta tekijästä $(x + y)$ aina yksi termi ja nämä kerrotaan keskenään; lopuksi saadut tulot lasketaan yhteen. Siten esimerkiksi tapauksessa $n = 3$ saadaan $xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy$. Yleisesti termejä on 2^n kappaletta. ■ termi

Termeissä on kuitenkin samanmuotoisia, jotka voidaan yhdistää. Edellä oleva lauseke saa tällöin muodon $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Yleisessä tapauksessa muotoa $x^p y^{n-p}$ olevien termien lukumäärä ratkeaa sen mukaan, monellako tavalla n tekijästä $(x+y)$ voidaan poimia ne p kappaletta, joista valitaan termiksi x; muista valitaan termiksi y. Kombinaatiotarkastelujen perusteella näiden lukumäärä on juuri $\binom{n}{p}$, jolloin päädytään binomikaavaan. ■ lukumäärä (merkkijonojen) ■ lukumäärä (merkkijonojen)

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ polynomit, ■ lukumäärän laskeminen

Pascalin kolmio

Mekaaninen lasku (kertomia käyttäen) osoittaa, että binomikertoimien välillä vallitsee yhtälö

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}.$$

Jos kertoimet kirjoitetaan riveille siten, että rivillä n ovat peräkkäin lueteltuina kertoimet $\binom{n}{p}$, kun $p = 0, 1, \ldots, n$, saadaan ns. *Pascalin kolmio*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & - & & - & & - & & & &
\end{array}$$

Binomikertoimien välinen yhtälö merkitsee, että seuraavan rivin kertoimet saadaan laskemalla yhteen kaksi viistosti yläpuolella olevaa. Pascalin kolmion avulla voidaan siis helposti laskea binomikertoimet käyttämättä kertomaan perustuvia lausekkeita.

■ binomikaava

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: ■ polynomit, ■ lukumäärän laskeminen

Multinomikertoimet

Binomikertoimien yleistyksenä ovat *multinomikertoimet*. Näiden lauseke on

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!},$$

missä $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. Jos $m = 2$, nämä antavat binomikertoimet.

Multinomikertoimet ilmaisevat, miten monella tavalla n alkion joukko voidaan jakaa m osajoukkoon, joiden alkioiden lukumäärät ovat $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

■ lukumäärä (kombinaatioiden)

Binomikaavaa vastaa multinomikaava

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=m} \frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m}.$$

■ binomikaava
■ multinomikaava