ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio
KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ trigonometrian kaavat

---

Hyperbelifunktioiden määrittely

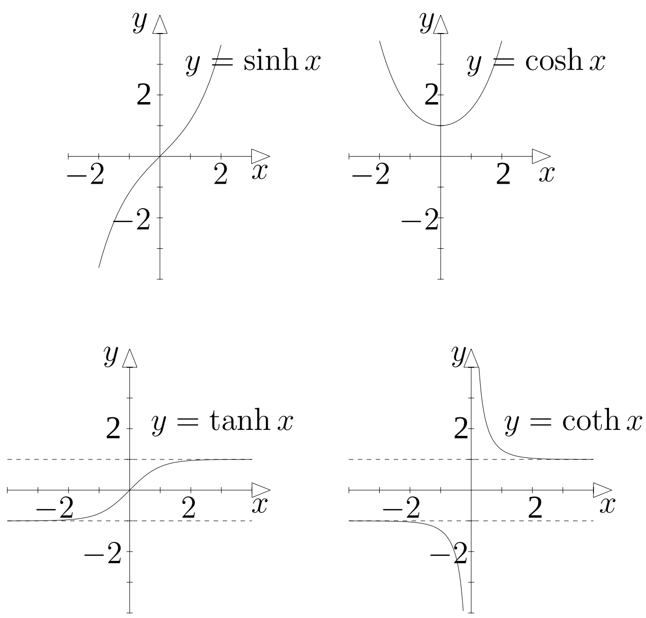
Hyperbelifunktiot eli *hyperboliset funktiot* määritellään yksinkertaisilla lausekkeilla:

■ funktio

$$\begin{aligned}
&\text{hyperbelisini:} && \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x});\\
&\text{hyperbelikosini:} && \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x});\\
&\text{hyperbelitangentti:} && \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1};\\
&\text{hyperbelikotangentti:} && \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.
\end{aligned}$$

Funktiot ovat kaikilla reaaliarvoilla määriteltyjä hyperbelikotangenttia lukuunottamatta; tämän kohdalla on oletettava $x \neq 0$.

Kuvaajat:



Hyperbelifunktioita tutki ensimmäisenä sveitsiläis-saksalainen Johann Heinrich Lambert 1700-luvulla.

■ Lambert (pii)

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio

KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ trigonometrian kaavat

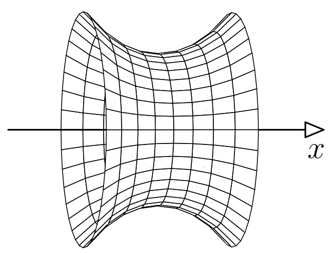
Ketjukäyrä ja katenoidi

Päistään kiinnitetty vapaasti riippuva ketju ottaa muodon

$$y = C\cosh(x/C),$$

missä C on vakio. Tämän johdosta hyperbelikosinin kuvaajaa usein kutsutaankin *ketjukäyräksi*. ■ käyrä (taso-)

Ketjukäyrän pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy pinta, jota kutsutaan *katenoidiksi*. Tämä on ns. minimipinta, jonka muodon ottaa esimerkiksi sopivasti tuettu saippuakalvo. ■ pinta



ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio
KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ trigonometrian kaavat

---

Hyperbelifunktiot ja trigonometriset funktiot

Hyperbelifunktioiden ja trigonometristen funktioiden välillä vallitsee tietynlainen samankaltaisuus. Tämä näkyy mm. funktioita koskevista kaavoista. Sama koskee funktioiden derivaattoja. Erojakin kuitenkin on. Hyperbelifunktiot esimerkiksi eivät ole jaksollisia.

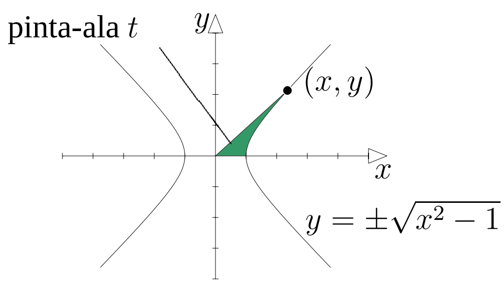
■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
■ derivaatta
■ jaksollinen (funktio)

Hyperbelifunktioiden ja trigonometristen funktioiden sukulaisuus tulee täysin ilmeiseksi vasta laajennettaessa funktioiden määrittely kompleksitasoon. Tällöin hyperbelifunktioistakin tulee jaksollisia. Lähemmin ei asiaa tässä käsitellä.

■ kompleksitaso

Hieman epämääräisesti voidaan sanoa, että hyperbelifunktiot suhtautuvat tasasivuiseen hyperbeliin $x^2 - y^2 = 1$ samaan tapaan, kuin trigonometriset funktiot suhtautuvat yksikköympyrään $x^2 + y^2 = 1$.

■ hyperbeli (kartioleikkauksena)
■ hyperbeli (xy-koordinaateissa)



Jos origo yhdistetään hyperbelin pisteeseen (x, y) ja yhdysjanan, hyperbelinkaaren ja x-akselin rajaamaa pinta-alaa merkitään t, niin $x = \cosh(2t)$, $y = \sinh(2t)$. Tämä on osoitettavissa integraalilaskennan avulla.

■ määrätty integraali

Vastaava tulos on voimassa myös trigonometrisella puolella: Koska yksikköympyrän keskuskulmaa α vastaavan sektorin ala on $t = \frac{1}{2}\alpha$, on $x = \cos(2t)$, $y = \sin(2t)$.

■ keskuskulma
■ sektori
■ sektori (ala)

■ Sisältö
■ Hakemisto

Hyperboliset kaavat

■ trigonometria (peruskaavat)
■ trigonometria (johdannaiskaavat)

Monilla trigonometrian kaavoilla on hyperboliset vastineensa. Nämä ovat samanmuotoisia kuin trigonometriassa, mutta eräitä merkkieroja esiintyy, kuten seuraava osoittaa.

Kirjoittamalla funktiot eksponenttifunktion avulla voidaan mekaanisilla laskuilla todeta oikeaksi kaava

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Yhteenlaskukaavat saadaan samoin mekaanisilla laskuilla:

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \end{aligned}$$

Näistä voidaan jatkaa eteenpäin samoin kuin trigonometrian kaavoja johdettaessa.

Hyperbelifunktioiden käyttökelpoisuus perustuu em. samankaltaisuuteen trigonometristen funktioiden kanssa. Kummatkin muodostavat käyttökelpoisen työkalun mm. integrointitehtävissä.

Hyperbolisten ja trigonometristen kaavojen samankaltaisuuden tarkempi analysointi edellyttää funktioiden tarkastelua kompleksialueella; tähän ei kuitenkaan paneuduta.

■ kompleksitaso