ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ logiikka

Induktion periaate

Olkoon $P(n)$ jokin luonnollisesta luvusta n riippuva väittämä, joka halutaan osoittaa voimassa olevaksi, olipa n mikä tahansa luonnollinen luku.

■ luonnollinen luku

Esimerkiksi $P(n)$ voisi tarkoittaa yhtälöä

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

Jos $n = 5$, kyseessä on yhtälö $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5(5+1)(2 \cdot 5 + 1)$; merkintä $P(5)$ tarkoittaa tätä yhtälöä. Arvolla $n = 2$ saadaan väittämä $P(2)$ eli $1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2(2+1)(2 \cdot 2 + 1)$. Arvolla $n = 1$ kutistuu väittämä $P(1)$ muotoon $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$. Kaikki nämä ovat voimassa olevia yhtälöitä, kuten yksinkertaiset laskut osoittavat.

Yhtälö on voimassa joka ainoalle luonnolliselle luvulle n, ts. $P(n)$ on tosi kaikilla n, mutta muutamien arvojen kokeilu ei tietenkään riitä todistamaan tätä.

Matemaattinen induktio on todistusmenetelmä, jota voidaan käyttää tämäntyyppisten asioiden todistamiseen.

Todistuksen rakenne on seuraava:

1) Osoitetaan aluksi, että väittämä $P(1)$ on tosi. Tämä on yleensä yksinkertainen lasku.

2) Todistetaan ns. *induktioaskel*: *Jos* $P(n)$ *on tosi, niin myös* $P(n+1)$ *on tosi* eli symbolein $P(n) \implies P(n+1)$. Tämä todistus on suoritettava siten, että päättely on pätevä kaikille luonnollisille luvuille n.

Tällöin katsotaan väittämän $P(n)$ tulleen todistetuksi kaikille arvoille $n \in \mathbb{N}$. Perusteluna on seuraavan ketjun syntyminen:

$$P(1) \implies P(2) \implies P(3) \implies P(4) \implies \ldots .$$

Aluksi on nimittäin todettu $P(1)$ voimassa olevaksi. Koska induktioaskel on todistettu jokaiselle arvolle n, se pätee erityisesti arvolla $n = 1$: jos $P(1)$ on tosi, niin myös $P(2)$ on. Mutta $P(1)$ on jo osoitettu todeksi ja siis myös $P(2)$ on tosi. Arvolla $n = 2$ induktioaskel antaa $P(2) \implies P(3)$. Koska edellä on jo $P(2)$ osoitettu todeksi, seuraa tästä, että myös $P(3)$ on tosi. Näin jatketaan.

Induktiotodistuksen alkukohdan ei välttämättä tarvitse olla $n = 1$, vaan aivan hyvin voidaan aloittaa jostakin muustakin arvosta $n = n_0$ ja samalla periaatteella osoittaa väittämä päteväksi arvoilla $n \geq n_0$.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki matemaattisesta induktiosta

Todistetaan induktiolla luonnollisten lukujen $1, 2, \ldots, n$ neliöiden summaa koskeva väittämä $P(n)$ eli

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

oikeaksi kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

■ luonnollinen luku
■ summamerkintä

1) Arvolla $n = 1$ on

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \qquad \text{ja}$$
$$\frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\, 1(1+1)(2\cdot 1+1) = 1.$$

Väittämä $P(1)$ on siis tosi.

2) Induktioaskel. Oletetaan, että $P(n)$ on tosi ja osoitetaan tätä hyväksi käyttäen, että myös $P(n+1)$ on tosi. Väittämän $P(n+1)$ vasen puoli on

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$
$$= \frac{1}{6}\,(n+1)(2n^2+7n+6).$$

Toisen yhtäläisyysmerkin kohdalla on käytetty oletusta, että $P(n)$ on tosi. Toisaalta väittämän $P(n+1)$ oikea puoli on

$$\frac{1}{6}\,(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1] = \frac{1}{6}\,(n+1)(2n^2+7n+6).$$

$P(n+1)$ on siis tosi, koska sen vasen ja oikea puoli ovat samat.