ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ kulma

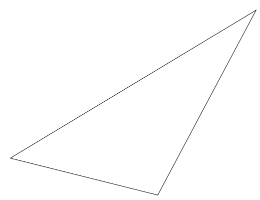
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ Pythagoraan lause, ■ monikulmiot

---

Kolmio: perusominaisuudet

Yksinkertaisin monikulmio on *kolmio*, joka muodostuu kolmesta pisteestä, kolmion *kärjistä*, ja näitä yhdistävistä janoista, kolmion *sivuista*. Kussakin kärjessä kohtaavien sivujen välissä on yksi kolmion *kulmista*.

■ monikulmio
■ kolmio (ala)
■ kulma (taso-)

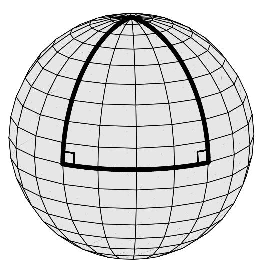


Toisin kuin muut monikulmiot kolmio on aina tasokuvio: Jos kolme pistettä eivät ole samalla suoralla, mutta sijaitsevat avaruudessa muutoin miten tahansa, ne määräävät aina tason yksikäsitteisesti. Pisteiden määräämä kolmio sijaitsee tässä tasossa.

Paralleeliaksioomasta seuraa, että minkä tahansa (euklidisen) kolmion kulmien summa on $180°$.

■ paralleeliaksiooma
■ paralleeliaksiooma
■ paralleeliaksiooma
■ geometria (epäeuklidinen)
■ geometria (epäeuklidinen)
■ pallokolmio

Epäeuklidisessa geometriassa paralleeliaksiooma ei kuitenkaan ole voimassa eikä kolmion kulmien summa myöskään ole $180°$. Esimerkkinä olkoon pallokolmio, joka muodostuu pallon päiväntasaajan kaaresta sekä kahdesta navalta päiväntasaajalle ulottuvasta meridiaanikaaresta, joiden välinen aste-ero on α. Kolmion kulmien summa on tällöin $180° + \alpha$.



Tavallisen (euklidisen) kolmion sivujen pituuksille pätee seuraava: Kahden sivun summa on suurempi kuin kolmas sivu. Kahden sivun erotus on pienempi kuin kolmas sivu.

Täten muodostuvia epäyhtälöitä kutsutaan *kolmioepäyhtälöiksi* ja niillä on tavattoman paljon yleistyksiä monille matematiikan aloille. Esimerkiksi reaali- tai kompleksilukujen itseisarvoja koskevissa epäyhtälöissä $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ja $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$ tai vektoreiden pituuksia koskevissa epäyhtälöissä $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ ja $||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ on kyse samasta asiasta. Lukija piirtäköön kuvan!

■ epäyhtälö
■ itseisarvo (reaaliluvun)
■ itseisarvo (kompleksiluvun)
■ vektorin pituus

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ kulma

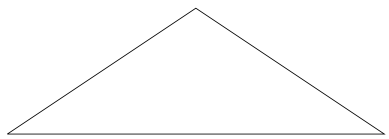
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ Pythagoraan lause, ■ monikulmiot

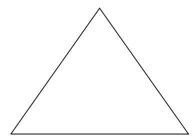
---

Tasakylkinen, tasasivuinen, suorakulmainen kolmio

Jos kolmion sivuista kaksi on yhtä pitkiä, sanotaan, että kolmio on *tasakylkinen*. Yhtä pitkät sivut ovat tasakylkisen kolmion *kyljet*, kolmas sivu on sen *kanta*. Yhtä pitkien kylkien vastaiset kulmat ovat yhtä suuret.

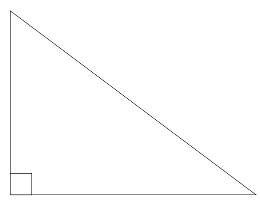
Jos kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kolmio on *tasasivuinen*. Tällöin myös kaikki kulmat ovat yhtä suuria, kukin $60°$.





Jos yksi kolmion kulmista on suora, ts. $= 90°$, kolmiota sanotaan *suorakulmaiseksi*. Suoran kulman kylkinä olevat sivut ovat suorakulmaisen kolmion *kateetit*, suoran kulman vastainen sivu sen *hypotenuusa*.

■ kulma (suora)



Ks. myös Pythagoraan lausetta ja ns. muistikolmioiden ominaisuuksia.

■ Pythagoraan lause
■ muistikolmio
■ muistikolmio

■ Sisältö
■ Hakemisto

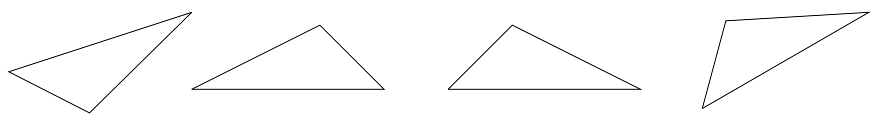
Kolmioiden yhtenevyys

Kahta (euklidisen geometrian) kolmiota sanotaan *yhteneviksi*, jos ne voidaan siirtää toistensa päälle siten, että kärjet yhtyvät, jolloin myös sivut yhtyvät. Tällöin on sallittua myös kääntää kolmio peilikuvakseen, ts. siirtää ja kiertää sitä kolmiulotteisessa avaruudessa. Yhtyvät kärjet, kulmat ja sivut ovat kolmioiden *vastinkärkiä*, *vastinkulmia* ja *vastinsivuja*, yleisemmin *vastinosia*.

■ geometria (euklidinen)
■ geometria (euklidinen)

Yhtenevien kolmioiden vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuria, samoin vastinsivut.

Alla olevan kuvion kolmiot ovat kaikki yhteneviä:



■ geometria (synteettinen)

Synteettisen geometrian päättelyt perustuvat usein kolmioiden todistamiseen yhteneviksi. Tällöin nojaudutaan yleensä johonkin seuraavassa esitettävään kolmioiden yhtenevyyttä koskevaan lauseeseen.

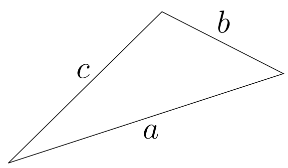
■ Sisältö
■ Hakemisto

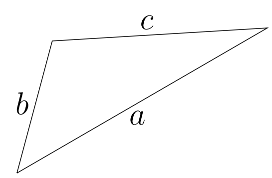
Yhtenevyyslauseet I

Kolmioita koskevat yhtenevyyslauseet ovat seuraavat.

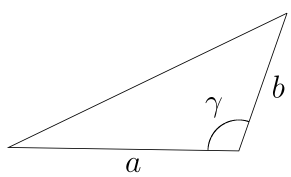
Kunkin lauseen lopussa on ilmoitettu siitä usein käytettävä lyhenne, missä kirjaimet (S = sivu, K = kulma) kuvaavat yhtenevyyteen vaadittavien yhtä suurten vastinosien keskinäistä sijaintia.

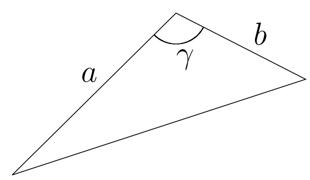
- Jos kolmiossa ovat kaikki sivut yhtä suuret kuin vastinsivut toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (SSS).



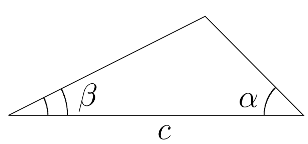


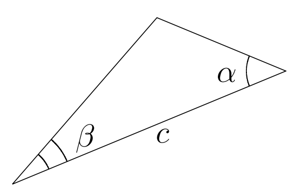
- Jos kolmiossa on kaksi sivua ja niiden välinen kulma yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (SKS).





- Jos kolmiossa on kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (KSK).



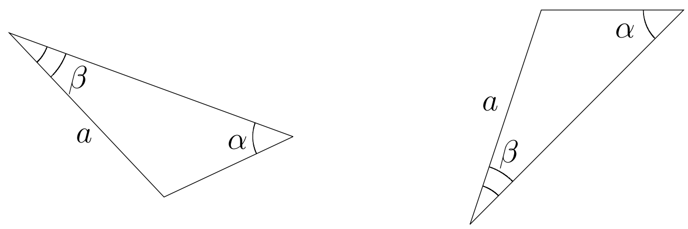


Jatkuu

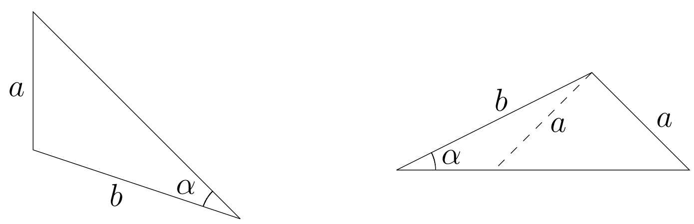
ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ kulma
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ Pythagoraan lause, ■ monikulmiot

Yhtenevyyslauseet II

- Jos kolmiossa on kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (KKS).

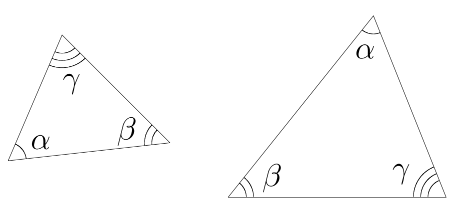


- Jos kolmiossa on kaksi sivua ja toisen vastainen kulma yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa ja jos lisäksi toisen sivuparin vastaisten kulmien summa ei ole $180°$, niin kolmiot ovat yhtenevät (SSK).



Kuvion katkoviiva osoittaa tilannetta, missä lisäehto ei täyty.

Yhtenevyyslausetta KKK ei luonnollisestikaan ole: Kulmat voivat pareittain olla yhtä suuria, mutta kolmiot ovat silti mittakaavaltaan erilaisia.



ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ kulma
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ Pythagoraan lause, ■ monikulmiot

---

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Kahta kolmiota sanotaan *yhdenmuotoisiksi*, jos toinen voidaan suurentamalla tai pienentämällä (so. mittakaavaa muuttamalla, mutta millään muulla tavalla venyttämättä) saattaa yhteneväksi toisen kanssa. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosista puhutaan samaan tapaan kuin yhtenevien kolmioiden tapauksessa.

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat keskenään yhtä suuria ja vastinsivut ovat verrannollisia, ts. niiden pituuksien suhteella on sama arvo sivuparista riippumatta. Tätä suhdetta kutsutaan kolmioiden *yhdenmuotoisuussuhteeksi*.

■ verranto

Jos kolmioiden yhdenmuotoisuussuhde on k, niiden pinta-alojen suhde on k^2.

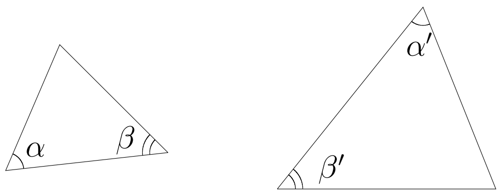
Seuraavassa esitettävät kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet ovat samantyyppiset kuin yhtenevyyslauseet. Joitakin eroja kuitenkin on.

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ kulma
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ Pythagoraan lause, ■ monikulmiot

Yhdenmuotoisuuslauseet

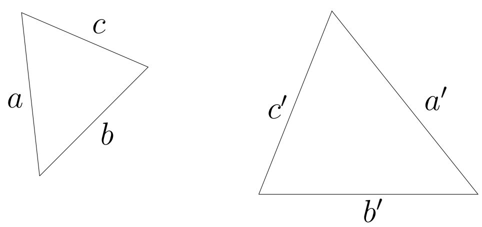
Seuraavilla perusteilla kaksi kolmiota voidaan päätellä yhdenmuotoisiksi. Lauseista käytetään samantyyppisiä lyhenteitä kuin yhtenevyyslauseista.

- Jos kolmiossa on kaksi kulmaa yhtä suurta kuin vastinkulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (KK).



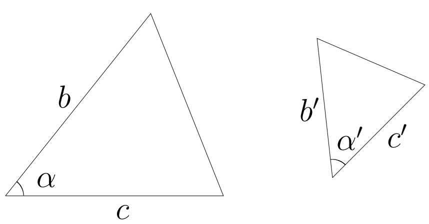
$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$

- Jos kolmiossa ovat kaikki sivut verrannolliset vastinsivuihin toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (SSS).



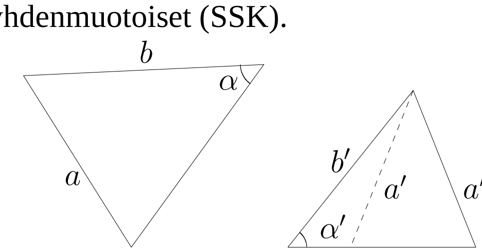
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- Jos kolmiossa on kaksi sivua verrannollista vastinsivuihin toisessa kolmiossa ja niiden välinen kulma on yhtä suuri kuin vastinkulma toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (SKS).



$$\alpha = \alpha'$$
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- Jos kolmiossa on kaksi sivua verrannollista vastinsivuihin toisessa kolmiossa ja toisia vastinsivuja vastaavat kulmat ovat yhtä suuret sekä lisäksi toisen sivuparin vastaisten kulmien summa ei ole $180°$, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (SSK).



$$\alpha = \alpha'$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Kuvion katkoviiva osoittaa tilannetta, missä lisäehto ei täyty.

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ kulma

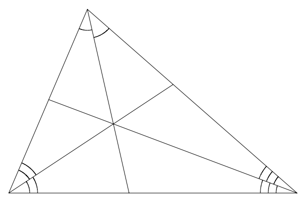
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ Pythagoraan lause, ■ monikulmiot

■ Sisältö
■ Hakemisto

Kulmanpuolittajat ja keskijanat

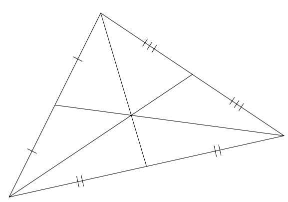
Kolmion *kulmanpuolittaja* jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan. Kaikkien kolmen kulman puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, mikä on suhteellisen helposti todistettavissa synteettisen geometrian keinoin. Kulmanpuolittajien leikkauspiste on myös kolmion sisään piirretyn ympyrän (so. kolmion sivuja sivuavan ympyrän) keskipiste.

■ geometria (synteettinen)
■ ympyrä



Kolmion *keskijana* on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastaisen sivun keskipisteeseen. Kaikki kolme keskijanaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa jokaisen keskijanan suhteessa $1 : 2$. Todistus on helpoin vektorigeometriaa käyttäen, mutta voidaan suhteellisen helposti tehdä myös synteettisellä geometrialla.

■ keskijana (esimerkki)
■ keskijana (esimerkki)
■ keskijana (esimerkki)
■ geometria (vektori-)

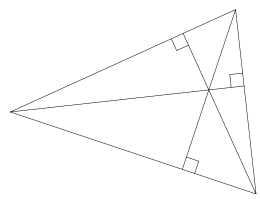


■ Sisältö
■ Hakemisto

Korkeusjanat ja keskinormaalit

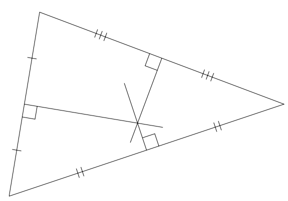
Kolmion *korkeusjana* on kolmion kärjestä vastaiselle sivulle piirretty normaali, so. sivua vastaan kohtisuora suora. Kaikkiaan näitä on kolme. Sekä synteettisen geometrian että vektorigeometrian keinoin voidaan melko helposti osoittaa, että korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

■ normaali
■ geometria (synteettinen)
■ geometria (vektori-)



Kolmion *keskinormaali* on kolmion sivun keskipisteen kautta asetettu sivun normaali. Näitäkin on kolme ja samoinkuin korkeusjanojen tapauksessa voidaan osoittaa, että ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on myös kolmion ympäri piirretyn ympyrän (so. kolmion kärkien kautta kulkevan ympyrän) keskipiste.

■ ympyrä



Korkeusjanojen leikkauspiste, keskinormaalien leikkauspiste ja keskijanojen leikkauspiste sijaitsevat kolmiosta riippumatta samalla suoralla, jota kutsutaan *Eulerin suoraksi*. Kulmanpuolittajien leikkauspiste ei sen sijaan yleensä ole tällä suoralla.

■ Euler

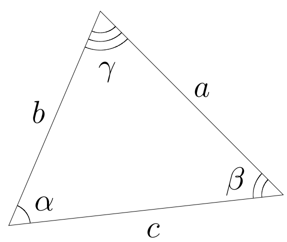
Kolmiosta voidaan löytää monia muitakin geometrisia yhteyksiä. Eräs tällainen on *Feuerbachin ympyrä*, joka kulkee jokaisessa kolmiossa seuraavien yhdeksän pisteen kautta: kolmion korkeusjanojen kantapisteet, so. ne pisteet, joissa korkeusjanat kohtaavat vastaisen sivun; kolmion sivujen keskipisteet; kolmion kärjet korkeusjanojen leikkauspisteeseen yhdistävien janojen keskipisteet. Feuerbachin ympyrän keskipiste puolestaan on Eulerin suoralla.

Sinilause ja kosinilause

Monissa sovelluksissa joudutaan määrittämään kolmion sivujen pituudet ja kulmien suuruudet, kun joitakin tietoja kolmiosta on käytettävissä. Tyypillinen esimerkki on maanmittarin ongelma: On mitattu kahden pisteen välinen etäisyys ja suuntakulmat näistä pisteistä kolmanteen pisteeseen, jonka etäisyys on määritettävä. Tunnetaan siis kaksi kolmion kulmaa ja näiden välisen sivun pituus; on määritettävä kolmion muut sivut.

Tämäntyyppisten tehtävien ratkaiseminen perustuu *sinilauseeseen* ja *kosinilauseeseen*:

■ sini
■ kosini



Jos kolmion sivut ovat a, b ja c sekä näiden vastaiset kulmat samassa järjestyksessä α, β ja γ, on

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \quad \text{(sinilause)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{(kosinilause)}.$$

Tässä r on kolmion ympäri piirretyn ympyrän, so. kolmion kärkien kautta kulkevan ympyrän säde.

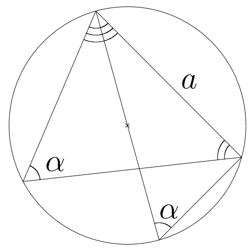
Lauseiden todistukset seuraavassa.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Sini- ja kosinilauseen todistamisesta

Sinilauseen ensimmäinen osa $\sin\alpha = a/(2r)$ voidaan todistaa muodostamalla kolmion ympäri piirretyn ympyrän sisään uusi kolmio, jonka yhtenä sivuna on alkuperäisen kolmion sivu a ja toisena ympyrän halkaisija. Halkaisijan vastainen kulma (ympyrän kehäkulma) on suora, kuten esimerkiksi vektorigeometrialla nähdään. Tulos seuraa tämän jälkeen sinin määritelmästä (vastainen kateetti / hypotenuusa) ja siitä, että ympyrässä kaikki samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria.

■ kehäkulma (esimerkki)
■ kehäkulma (esimerkki)
■ kehäkulma
■ trigonometrinen funktio (suorakulmaisessa kolmiossa)



Kosinilauseen todistaminen on yksinkertainen vektorigeometrian sovellus: Jos kolmion sivuvektorit ovat $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$, on kolmannen sivun vektoriesitys $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Tällöin on skalaaritulon ominaisuuksien perusteella

■ geometria (vektori-)
■ skalaaritulo

$$c^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Kosinilause on itse asiassa Pythagoraan lauseen yleistys: Jos $\gamma = 90°$, saadaan Pythagoraan lause.

■ Pythagoraan lause