

Koordinaatistot

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ kompleksiluvut

1/6

■ Sisältö
■ Hakemisto

Koordinaatiston ja koordinaattien käsite

Geometrisissa tehtävissä — ja siten myös monissa käytännön ongelmissa — on usein tarpeen ilmoittaa pisteiden sijainti jonkin kiinteään vertailusysteemin suhteen. Vertailusysteemiä kutsutaan *koordinaatistoksi* ja pisteiden paikat ilmoittavia lukuja *koordinaateiksi*.

■ geometrinen
probleema
■ piste

Koordinaatistoja muodostetaan sekä *kaksiulotteiseen tasoon* että *kolmiulotteiseen avaruuteen*. Pisteiden paikan ilmoittavat koordinaatit voivat olla sopivasti valittuja etäisyyksiä, kulmia tai joitakin muita vastaavia suureita. Tasotapauksessa koordinaatteja tarvitaan kaksi, avaruustapauksessa kolme. Niiden lukumäärää kutsutaan *dimensioksi* eli ulotteisuudeksi; tason dimensio on siten 2, avaruuden 3.

Yleisimmin käytetty koordinaatisto on ns. suorakulmainen koordinaatisto, jossa xy -koordinaatisto, avaruudessa xyz -koordinaatisto. Koordinaatisto voidaan kuitenkin muodostaa monella muullakin tavalla. Probleeman luonteesta, esimerkiksi tilanteen symmetrioista riippuu, millaisen koordinaatiston käyttö on yksinkertaisinta.

Tason ja avaruuden ohella koordinaatisto voidaan muodostaa myös *yksiulotteiselle suoralle*. Yksinkertaisin tapa on kiinnittää jokin suoran piste ja ilmoittaa pisteiden paikat etäisyyksinä tästä pisteestä, toiseen suuntaan positiivisina, toiseen negatiivisina. Kyseessä on itse asiassa lukusuora.

■ lukusuora

Koordinaatistot

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ kompleksiluvut

2/6

■ Sisältö

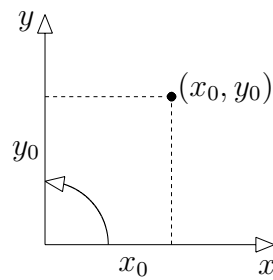
■ Hakemisto

Suorakulmainen koordinaatisto tasossa

Tason suorakulmainen koordinaatisto muodostetaan valitsemalla jokin piste *origoksi* ja asettamalla tämän kautta kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa suoraa *koordinaattiakseleiksi*. Suorille valitaan positiiviset suunnat ja niitä kutsutaan *x-* ja *y-*akseleiksi. Nimitykset valitaan yleensä siten, että kierrettäessä positiiviselta *x-*akselilta lähtien origon ympäri vastapäivään 90 astetta päädytään positiiviselle *y-*akselille. Tätä kutsutaan myös *positiiviseksi kiertosuunnaksi*.

■ kiertosuunta
(positiivinen)

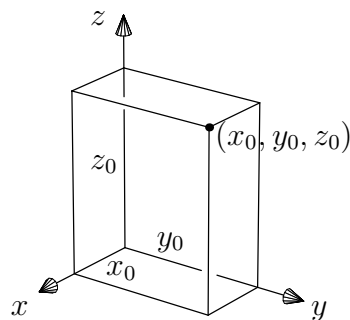
Pisteen paikka ilmoitetaan kahtena koordinaattina: *x*-koordinaatti on kohtisuora etäisyys *y*-akselista ja *y*-koordinaatti kohtisuora etäisyys *x*-akselista. *x*-koordinaatti on positiivinen, jos piste sijaitsee positiivisen *x*-akselin puolella *y*-akselia, vastakkaisella puolella negatiivinen. Vastaava pätee *y*-koordinaatille.



Suorakulmainen koordinaatisto avaruudessa

Avaruuden suorakulmainen koordinaatisto muodostetaan samaan tapaan kuin tasokoordinaatisto. *Koordinaattiakseleita* on tällöin kolme, kaikki toisiaan vastaan kohtisuoria. Voidaan ajatella, että tason xy -koordinaatistoa täydennetään asettamalla origon kautta sekä x - että y -akselia vastaan kohtisuora z -akseli. Tämän positiivisen suunnan valitsemiseen on kaksi mahdollisuutta ja se valitaan yleensä siten, että x -akselin, y -akselin ja z -akselin (tässä järjestyksessä) positiiviset suunnat suhtautuvat siten kuin ihmisen oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi suorakulmaisiksi ojennettuina. Tällöin puhutaan *oikeakätisestä koordinaatistosta*, mikä on tason positiivisen kiertosuunnan vastine avaruudessa.

Koordinaattiakseleiden määräämät tasot ovat *koordinaattitasoja*: xy -taso, yz -taso ja zx -taso. Pisteen paikka ilmoitetaan kolmena positiivisena tai negatiivisena koordinaattina samaan tapaan kuin tasossa: x -koordinaatti on kohtisuora etäisyys (positiivisena tai negatiivisena) yz -tasosta, y -koordinaatti zx -tasosta ja z -koordinaatti xy -tasosta.



Koordinaatistot

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ kompleksiluvut

4/6

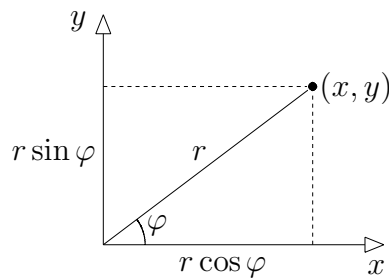
■ Sisältö

■ Hakemisto

Tason napakoordinaatisto

Tason *napakoordinaatistossa* pisteen paikka ilmoitetaan antamalla sen etäisyys r origosta ja suuntakulma eli *napakulma* φ positiiviseen x -akseliin nähden. Napakulma mitataan positiivisena positiiviseen kiertosuuntaan. Koordinaattien sallitut arvot ovat $r \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Kulmalle käytetään usein myös väliä $0 \leq \varphi < 2\pi$ ja sille voidaan tarpeen mukaan sallia arvoja, jotka sisältävät jakson 2π monikertoja.

■ kiertosuunta
(positiivinen)



Napakoordinaattien ja suorakulmaisten koordinaattien välinen yhteys on

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{sekä} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases} .$$

■ sini

■ kosini

■ arcus-funktio

On huomattava, että funktiosta \arctan ei välttämättä käytetä päähaaraa, koska tällöin saataisiin vain välillä $[-\pi/2, \pi/2]$ olevia napakulmia. Tarvittaessa päähaarasta saatuun arvoon on lisättävä tai siitä on vähennettävä π (jolloin itse asiassa käytetään sopivaa sivuhaaraa); miten milloinkin on meneteltävä, nähdään helpoimmin päättelemällä oikea koordinaatiston neljännes koordinaattien x ja y merkeistä.

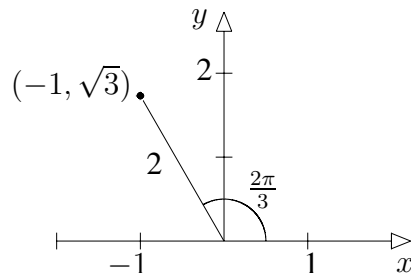
■ päähaara
(arcus)

■ sivuhaara
(arcus)

Esimerkiksi: Jos pisteen suorakulmaiset koordinaatit ovat $x = -1$, $y = \sqrt{3}$, ovat sen napakoordinaatit $r = 2$, $\varphi = 2\pi/3$.

■ muistikolmio

■ muistikolmio



Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys perustuu edellä kuvattujen napakoordinaattien käyttöön.

■ napakoordinaatit
(kompleksitason)

Koordinaatistot

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ kompleksiluvut

5/6

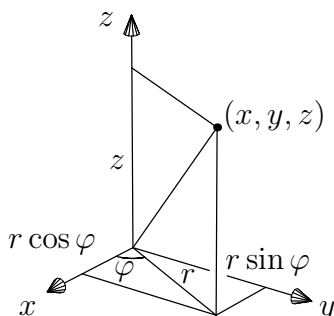
■ Sisältö

■ Hakemisto

Lieriökoordinaatit

Kolmiulotteisen avaruuden *lieriökoordinaatit* eli *sylinterikoordinaatit* saadaan käyttämällä xy-tason osalta napakoordinaatteja r , φ ja ottamalla z-koordinaatti kolmanneksi koordinaatiksi. Lieriökoordinaatit saavat siten arvot $r \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $z \in \mathbb{R}$.

■ lieriö



Lieriökoordinaattien ja suorakulmaisten xyz-koordinaattien väliset yhteydet ovat seuraavat:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases} .$$

■ sini

■ kosini

■ arcus-funktio

Tässä on arctan-funktiosta käytettävä sopivaa haaraa samoin kuin napakoordinaattien tapauksessa.

Koordinaatistot

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ trigonometriset funktiot, ■ kompleksiluvut

6/6

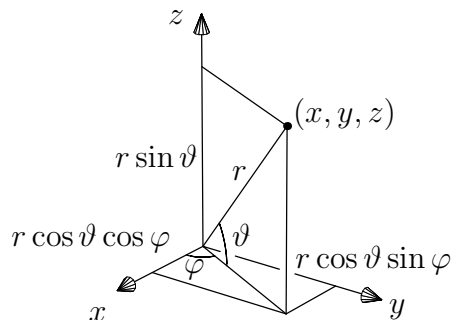
■ Sisältö

■ Hakemisto

Pallokoordinaatit

Kolmiulotteisen avaruuden *pallokoordinaatit* vastaavat paikan ilmoittamista pallon säteen sekä maantieteellisen pituuden ja leveyden avulla: $r \geq 0$ on pisteen etäisyys origosta, ts. sen origokeskisen pallon säde, jolla piste sijaitsee; $-\pi < \varphi \leq \pi$ pisteen pituus vastaten xy -tason napakulmaa; $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$ pisteen leveys, so. origon ja pisteen yhdysjanan kaltevuuskulma xy -tasoon nähden.

■ pallo



Pallokoordinaattien ja xyz-koordinaattien väliset yhteydet ovat seuraavat:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = r \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = r \sin \vartheta \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ \vartheta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} .$$

■ sini

■ kosini

■ arcus-funktio

Kulmaa φ laskettaessa on funktiosta \arctan käytettävä sopivaa haaraa kuten lieeriökoordinaattien ja tason napakoordinaattien tapauksessa. Funktiosta \arcsin sen sijaan käytetään aina päähaaraa kulman ϑ lausekkeessa.

■ päähaara
(arcus)

Edellä määriteltyihin pallokoordinaatteihin viitataan toisinaan *maantieteellisinä* pallokoordinaatteina. Varsinkin fysiikassa käytetään myös hieman toisella tavoin määriteltyjä, ns. *fysikaalisia* pallokoordinaatteja. Tällöin kulma ϑ korvataan kulmalla, joka ilmoittaa pisteen kaarietäisyyden positiivisesta z -akselista. Jos fyysikaalisten pallokoordinaattien kulmaa merkitään ϑ' , on siis $\vartheta' = \pi/2 - \vartheta$ ja $0 \leq \vartheta' \leq \pi$. Edellä oleviin vastaavuuskaavoihin tulee vähäisiä muutoksia.