■ Sisältö
■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio
KATSO MYÖS:

Logaritmifunktion määrittely

Eksponenttifunktio $\exp_a(x) = a^x$, missä $a > 1$, on määritelty kaikilla reaaliarvoilla x, on aidosti kasvava ja saa arvoikseen kaikki positiiviset reaaliarvot. Tällöin kyseessä on bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ja sillä on käänteisfunktio $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}_+ =$ positiiviset reaaliluvut.)

Käänteisfunktiota kutsutaan a-kantaiseksi *logaritmiksi* ja merkitään $\log_a$. Siis

$$y = \exp_a(x) = a^x \iff x = \log_a y.$$

Jos erityisesti kantalukuna on Neperin luku e, puhutaan *luonnollisesta logaritmista*, jota merkitään $\ln$. Jos kantalukuna on 10, kyseessä on *Briggsin logaritmi* merkintänä yleensä $\lg$.

Vastaava päättely kuin edellä voidaan tehdä myös tapauksessa $0 < a < 1$. Ainoana erona on, että eksponenttifunktio $\exp_a$ ei tällöin ole aidosti kasvava vaan vähenevä. Tällaisia logaritmifunktioita ei kuitenkaan yleensä käytetä.

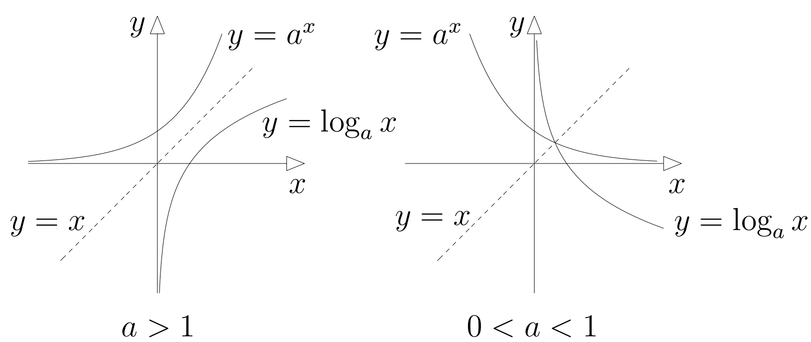
Jos $a > 1$, on logaritmifunktio aidosti kasvava; jos $0 < a < 1$, niin aidosti vähenevä.

Koska $a^0 = 1$ ja $a^1 = a$, on kantaluvusta a riippumatta

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1,$$

ts. ’ykkösen logaritmi on nolla’ ja ’kantaluvun logaritmi on yksi’.

■ funktio
■ eksponenttifunktio
■ kasvava (funktio)
■ kasvava (funktio)
■ bijektio
■ käänteisfunktio
■ käänteisfunktio
■ Neperin luku
■ vähenevä (funktio)
■ vähenevä (funktio)



■ Sisältö
■ Hakemisto

Logaritmin laskusäännöt

Olkoon $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$ ja $y = a^x$. Tällöin on $x_1 = \log_a y_1$, $x_2 = \log_a y_2$ ja $x = \log_a y$. Eksponenttifunktion laskusäännöt

■ laskusääntö (eksponentti-funktion)

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \quad \text{ja} \quad (a^x)^b = a^{bx}$$

saavat tällöin muodon $y_1 y_2 = a^{\log_a y_1 + \log_a y_2}$ ja $y^b = a^{b \log_a y}$. Muodostamalla kummastakin puolesta a-kantainen logaritmi saadaan *logaritmin laskusäännöt*:

$$\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2 \quad \text{ja} \quad \log_a(y^b) = b \log_a y.$$

Yhdistämällä säännöt saadaan osamäärän logaritmille

$$\log_a(y_1/y_2) = \log_a(y_1 y_2^{-1}) = \log_a y_1 - \log_a y_2.$$

Mikä tahansa logaritmi on helposti palautettavissa luonnolliseen logaritmiin. Koska eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat käänteisfunktioita, on $a^{\log_a x} = x$, mistä saadaan ottamalla luonnollinen logaritmi kummastakin puolesta $(\log_a x)(\ln a) = \ln x$. Siis

■ käänteisfunktio
■ käänteisfunktio

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

■ Sisältö
■ Hakemisto

Eksponentti- ja logaritmiyhtälöt

■ eksponenttifunktio
■ yhtälö (transkendentti-)
■ Newtonin iteraatio

Eksponentti- ja logaritmiyhtälöitä saattaa olla mahdollista ratkaista laskusääntöjä käyttäen. Yleensä ne kuitenkin ovat sellaisia transkendenttiyhtälöitä, joissa ainoa mahdollisuus on numeerinen ratkaiseminen esimerkiksi Newtonin iteraatiota käyttäen.

1) Yhtälö

$$4^x + 4^{-x} = 5/2$$

voidaan ratkaista kertomalla se ensin tekijällä 4^x, jolloin saadaan toisen asteen yhtälö tuntemattomana 4^x:

■ yhtälö (toisen asteen)

$$(4^x)^2 - \tfrac{5}{2}4^x + 1 = 0.$$

Tällä on juuret $4^x = 2$ ja $4^x = \frac{1}{2}$. Ottamalla kummastakin puolesta 2-kantainen logaritmi saadaan $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -\frac{1}{2}$.

2) Yhtälö

$$\log_x 2 + 2 = \log_x(1 - x)$$

voidaan logaritmin laskusääntöjen avulla sieventää muotoon

$$\log_x \frac{1-x}{2} = 2.$$

Jotta esiintyvä x-kantainen logaritmifunktio olisi määritelty, on ilmeisestikin oltava $x > 0$, $x \neq 1$ ja $1 - x > 0$.

Ottamalla kummastakin puolesta x-kantainen eksponenttifunktio saadaan toisen asteen yhtälö $\frac{1}{2}(1 - x) = x^2$. Tämän juuret ovat $x = -1$ ja $x = \frac{1}{2}$, joista vain jälkimmäinen täyttää määrittelyehdot. Ainoa ratkaisu on siis $x = 1/2$.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Logaritmifunktion historiaa

Logaritmit keksi skotlantilainen kartanonherra John Napier (Neper) 1500-luvun lopussa. Tulokset hän julkaisi vuonna 1614. Ideoita kehitti edelleen englantilainen Henry Briggs, jonka kirja logaritmitauluineen ilmestyi 1624. Samoihin ideoihin johtui myös heidän aikalaisensa alunperin sveitsiläinen kelloseppä Jobst Bürgi.

■ Napier
■ Briggs

Tavoitteena oli helpottaa mm. tähtitieteen numerolaskuja, erityisesti kerto- ja jakolaskuja sekä potenssiinkorotuksia.

Idea perustuu kertolaskun muuntamiseen yhteenlaskuksi, jakolaskun vähennyslaskuksi ja potenssiinkorotuksen kertolaskuksi edellä esitettyjen kaavojen avulla:

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log(x/y) = \log x - \log y \quad \text{ja} \quad \log(x^b) = b \log x.$$

Tätä varten tarvittiin logaritmitaulut, joista voitiin löytää annetun luvun logaritmi ja kääntäen annetun logaritmin perusteella vastaava luku.

Logaritmitauluja käytettiin numeeristen laskujen suorittamiseen 1970-luvun alkuun saakka, jolloin elektroniset laskimet syrjäyttivät ne. Vielä 60-luvulla jokainen lukiolainen perehtyi logaritmitaulujen käyttöön.

Mikäli laskujen tarkkuusvaatimus ei ollut kovin suuri — noin kolme merkitsevää numeroa riitti — käytettiin logaritmitaulujen sijasta laskuviivainta. Tämäkin perustuu logaritmien käyttöön, mutta luvun ja sen logaritmin välinen muunnos on korvattu valmiilla asteikolla ja logaritmien yhteen- tai vähennyslaskua vastaa laskuviivaimen kielen siirto. Taskulaskimien tulo siirsi laskuviivaimetkin historiaan.

Ennen logaritmien keksimistä oli numeerisissa laskuissa käytössä toinen samantyyppinen idea. Trigonometrian kaava

■ trigonometria (johdannaiskaavat)

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

nimittäin muuntaa myös kertolaskun yhteenlaskuiksi. Tulontekijät on ensin kosinitaulukon avulla tulkittava kulmien α ja β kosineiksi, minkä jälkeen saadaan taulukosta kulmien $\alpha+\beta$ ja $\alpha-\beta$ kosinit. Tulo on puolet näiden summasta. Tulontekijät on aluksi skaalattava sopivasti. Menettelyä käytettiin 1500-luvulla tähtitieteessä. Käyttäjistä merkittävimpiä oli tanskalainen Tycho Brahe, jonka laskumenettelyihin tutustuminen osaltaan johdatti John Napierin kehittämään logaritmit.

■ kosini