ESITIEDOT: ■ funktiokäsite

KATSO MYÖS: ■ summa ja tulo, ■ lukujonon raja-arvo, ■ sarjat

## Lukujonon käsite

Reaalisella *lukujonolla* tarkoitetaan peräkkäin lueteltuja reaalilukuja:

■ reaaliluku

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots\ .$$

Vastaavasti puhutaan kompleksisesta lukujonosta, jos luvut $a_k$ ovat kompleksilukuja. Yleensä ajatellaan, että lukuja on jonossa äärettömän paljon. Lukuja kutsutaan myös jonon *termeiksi*.

■ kompleksiluku

Esimerkiksi

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \dots \qquad \text{ja} \qquad 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ \dots$$

ovat lukujonoja. Edellinen on reaalinen jono, joka muodostuu luvun $2$ potensseista, jälkimmäinen imaginaariyksikön $i$ potensseista muodostuva kompleksinen jono.

■ potenssi (kokonaisluku-)

■ imaginaariyksikkö

Itse asiassa lukujono on funktio luonnollisten lukujen joukosta reaali- tai kompleksilukujen joukkoon, $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tai $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Funktion arvoja on vain tapana merkitä siten, että argumentti esitetäänkin alaindeksinä: $F(1) = a_1$, $F(2) = a_2$, yleisesti $F(k) = a_k$. Kakkosen potenssit käsittävässä lukujonossa on siis kyse funktiosta $F(k) = 2^{k-1}$.

■ funktio

■ luonnollinen luku

Indeksoinnin ei välttämättä tarvitse alkaa luvusta $1$, vaan yleensä jostakin lausekkeen kannalta luonnollisesta aloitusarvosta. Funktion $F$ lähtöjoukko voi siis olla luonnollisten lukujen joukko täydennettynä tai supistettuna joillakin arvoilla. Esimerkiksi kakkosen potenssien muodostama jono voidaan aivan hyvin esittää myös muodossa $F(k) = a_k = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Toisena esimerkkinä olkoon $a_k = 1/\ln k$, $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ .

■ Sisältö
■ Hakemisto

**Eksplisiittisesti ja rekursiivisesti määritellyt lukujonot**

Jos lukujono määritellään antamalla jonon luvulle lauseke indeksin funktiona, esimerkiksi

$$a_k = 2^k \quad \text{tai} \quad a_k = (1 + \tfrac{1}{k})^k,$$

sanotaan, että jono on määritelty *eksplisiittisesti*.

Toisena vaihtoehtona on määritellä jono *rekursiivisesti*, jolloin ilmoitetaan sopiva määrä jonon alkupään lukuja ja yhtälö, joka kertoo, miten seuraava luku lasketaan edellisten avulla. Esimerkiksi määrittely

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \quad a_{k+2} = a_{k+1} + a_k,\ k = 1, 2, 3, \dots\ ,$$

antaa ns. *Fibonacci'n luvut* $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \dots$. Määrittelyn perusteella on selvää, että nämä ovat kaikki kokonaislukuja.

Tämäkin lukujono on mahdollista määritellä myös eksplisiittisesti, vaikka lausekkeen löytäminen ei aivan yksinkertaista olekaan:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Lasketaanpa lauseke millä tahansa indeksin $k$ arvolla, tuloksena on neliöjuurista huolimatta aina Fibonacci'n luku.

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite
KATSO MYÖS: ■ summa ja tulo, ■ lukujonon raja-arvo, ■ sarjat

## Aritmeettinen ja geometrinen jono

Lukujonoa sanotaan *aritmeettiseksi*, jos jonon kahden peräkkäisen luvun erotus on vakio:

$$a_1 \text{ annettu}, \quad a_{k+1} = a_k + d,\ k = 1, 2, 3, \dots\ .$$

Eksplisiittisessä muodossa tämä on $a_k = a_1 + (k-1)d$, $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Jono on *geometrinen*, jos kahden peräkkäisen luvun suhde on vakio:

$$b_1 \text{ annettu}, \quad b_{k+1} = qb_k,\ k = 1, 2, 3, \dots\ ,$$

tai eksplisiittisesti $b_k = q^{k-1}b_1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Sekä aritmeettisen että geometrisen jonon tapauksessa voidaan johtaa lauseke jonon $n$ ensimmäisen luvun summalle.

■ summa
■ summamerkintä

*Aritmeettinen summa*, so. aritmeettisen jonon $n$ ensimmäisen termin summa, on ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo kerrottuna termien lukumäärällä:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

*Geometrinen summa* eli geometrisen jonon $n$ ensimmäisen termin summa on hieman vaikeammin miellettävissä:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1\frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Osoittajassa esintyy siis suhdeluku $q$ korotettuna termien lukumäärän mukaiseen potenssiin. Poikkeuksena on tapaus $q = 1$, jolloin geometrisen jonon termit ovat kaikki yhtä suuria ja siis $t_n = nb_1$.

Aritmeettinen ja geometrinen summa antavat itse asiassa uudet lukujonot: $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \dots$ ja $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \dots$ . Myös $s_1$ ja $t_1$ ovat määriteltyjä edellä olevien lausekkeiden avulla: Tällöin on ajateltava, että merkintä $s_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k$ tarkoittaa summaa, joka ei oikeastaan summa olekaan, koska siinä on vain yksi termi, $a_1$; vastaavasti $t_1 = \sum_{k=1}^{1} b_k$.