■ Sisältö
■ Hakemisto

Määrätyn integraalin määrittely

Olkoon annettuna suljetulla välillä $[a,b]$ määritelty reaaliarvoinen funktio f. Tämän ei tarvitse olla derivoituva eikä edes jatkuva.

Jaetaan väli $[a,b]$ osaväleihin jakopisteillä x_k, joille pätee

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Osavälejä on tällöin n kappaletta. Niiden pituuksia merkitään $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; osavälien ei tarvitse olla yhtä pitkiä. Olkoon v_k jokin k:nnen osavälin piste: $v_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Funktion f arvoista välillä $[a,b]$ muodostettua summaa

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k$$

kutsutaan *Riemannin summaksi*.

Lisätään jakopisteiden määrää välin $[a,b]$ jaossa siten, että pisteiden määrän kasvaessa pisimmänkin osavälin pituus lähestyy nollaa. (Tämä merkitsee jaon tihentämistä tietyssä mielessä tasaisesti, so. suurin piirtein samalla tavoin välin eri osissa.) Tällöin vastaavassa Riemannin summassa $n \to \infty$ ja $\Delta x_k \to 0$, ts. termien lukumäärä kasvaa, mutta samalla jokainen yksittäinen termi lähestyy nollaa. Ei ole selvää, miten Riemannin summa tällöin käyttäytyy: kumpi voittaa, äärettömyyteen vievä termien lukumäärä vai nollaan vievä yksittäisten termien suuruus.

Jos Riemannin summalla edellä kuvatussa rajaprosessissa on raja-arvo riippumatta siitä, miten pisteet v_k osaväleiltä valitaan ja miten jaon tasainen tihentäminen tapahtuu, sanotaan, että funktio f on *integroituva* välillä $[a,b]$ ja sen *määrätty integraali* on mainittu raja-arvo. Merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k.$$

Rajaprosessi on luonteeltaan erilainen kuin lukujonon tai funktion raja-arvo. Itse asiassa määrätyn integraalin täsmällinen määrittely edellyttäisi tämänkin raja-arvotyypin määrittelyä $\delta - \epsilon$ -tekniikalla.

Voidaan osoittaa, että jos f on jatkuva funktio, niin Riemannin summan raja-arvo on olemassa. Se on olemassa myös monille epäjatkuville funktioille, mutta ei kaikille.

Integraalien käyttö perustuu usein Riemannin summien mukaiseen ajatteluun, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

■ suljettu väli
■ funktio (reaali-)
■ derivoituvuus
■ jatkuvuus
■ alkio
■ summamerkintä
■ raja-arvo (lukujonon)
■ raja-arvo (funktion)

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki 1 Riemannin summasta

■ eksponenttifunktio

Ilmakehän tiheys korkeudella z on karkean mallin mukaan

$$\rho(z) = 1.23\, e^{-0.00012z},$$

missä korkeus annetaan metreissä ja tiheyden yksikkönä on $\mathrm{kg/m^3}$. Sadan kilometrin korkeudessa on ilma jo niin ohutta, että voidaan katsoa ilmakehän kokonaisuudessaan olevan tätä alempana.

Ilmanpaine maanpinnalla aiheutuu yläpuolella olevan ilmamassan painosta. Paine voidaan siis laskea määrittämällä esimerkiksi neliömetrin suuruisen alueen yläpuolella olevan ilmapatsaan massa. Ongelmana on, että ilman tiheys ei ole vakio, vaan pienenee eo. kaavan mukaisesti.

Likimääräisesti ilmamäärä voidaan laskea jakamalla patsas esimerkiksi kilometrin korkuisiin osapatsaisiin ja käyttämällä jokaisen osan tiheydelle osapatsaan puolen välin arvoa. Tällöin saadaan summa

$$\sum_{k=1}^{100} \rho(1000k - 500)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1\ \mathrm{m}^2 \cdot 1000\ \mathrm{m} = \sum_{k=1}^{100} \rho(v_k)\Delta z_k\ \mathrm{kg},$$

missä $v_k = 1000k - 500$ ja $\Delta z_k = 1000$. Laskemalla summa saadaan 10243.79 kg.

Jos patsas jaetaankin sadan metrin korkuisiin osapatsaisiin, saadaan vastaavalla tavalla

$$\sum_{k=1}^{1000} \rho(100k - 50)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1\ \mathrm{m}^2 \cdot 100\ \mathrm{m} = \sum_{k=1}^{1000} \rho(v_k)\Delta z_k\ \mathrm{kg}.$$

Summan arvo on 10249.88 kg.

Kumpikin ovat edellä esitetyn tarkastelun mukaisia Riemannin summia. Jälkimmäinen on saatu edellisestä tihentämällä jakovälien pituudet kymmenesosaan. Jos jakoa edelleen tihennetään, summat lähestyvät ilmakehän paksuuden (0 – 100 000 m) yli otettua integraalia

$$\int_0^{100000} \rho(z)\, dz.$$

■ integrointi (kaavat)
■ integrointi (kaavat)

Tämän arvo on 10249.94 kg, kuten integroimalla voidaan todeta.

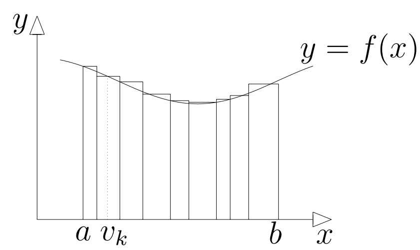
Vertailun vuoksi laskettakoon em. ilmamassan painoisen, neliömetrin alalle sopivan elohopeapatsaan korkeus. Koska elohopean tiheys on $13550\ \mathrm{kg/m^3}$, saadaan patsaan korkeudeksi $10250/13550 \approx 0.756$ metriä, mikä vastaa varsin hyvin normaalia ilmanpainetta 760 mmHg.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki 2 Riemannin summasta

Olkoon funktio f jatkuva ja ≥ 0 suljetulla välillä $[a, b]$. Kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa voidaan approksimoida seuraavalla tavalla:

■ funktio (reaali-)
■ jatkuvuus
■ suljettu väli
■ kuvaaja
■ pinta-ala



Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin pisteissä x_k, missä $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Muodostetaan suorakulmiot, joiden kantana on x-akselin osaväli $[x_{k-1}, x_k]$ (pituudeltaan Δx_k) ja korkeus määräytyy funktion osavälillä saamien arvojen mukaan: $f(v_k)$, missä $v_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Alaa approksimoi tällöin suorakulmioiden pinta-alojen summa

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k.$$

Tämä on muodoltaan jälleen Riemannin summa.

Mitä tiheämpi välin $[a, b]$ jako on, sitä tarkemmin suorakulmiot antavat etsityn pinta-alan ja toisaalta sitä lähempänä Riemannin summa on vastaavaa integraalia. Ala on siis sama kuin integraali

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Edellä sanottu pätee vain, mikäli $f(x) \geq 0$ tarkasteluvälillä. Jos f saa negatiivisia arvoja, tulee vastaavan alueen pinta-ala otetuksi huomioon negatiivisena Riemannin summassa ja myös integraalissa.

ESITIEDOT: ■ summa ja tulo, ■ integraalifunktio
KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa

Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

■ integraalifunktio

Määrätty integraali voidaan laskea integraalifunktion avulla. Jos nimittäin $F(x)$ on jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio kaikilla $x \in [a, b]$, on

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Tulos tunnetaan analyysin peruslauseen nimellä. Todistusta ei tässä käsitellä.

Usein käytetään merkintöjä

$$\bigg/_{\!a}^{b} F(x) = F(b) - F(a) \qquad \text{ja} \qquad F(x)\bigg|_a^b = F(b) - F(a).$$

■ integrointi (kaavat)
■ integrointi (kaavat)

Esimerkiksi on

$$\int_a^b ce^{-kx}\,dx = \bigg/_{\!a}^{b} -\frac{c}{k}e^{-kx} = \frac{c}{k}\left(e^{-ka} - e^{-kb}\right).$$

■ derivaatta

Funktion f integraalifunktio voidaan lausua määrätyn integraalin muodossa. Koska $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$, on

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = F'(x) = f(x).$$

Integraalifuntio voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Huomattakoon, että määrätyn integraalin integroimismuuttuja — edellä t — voi olla mikä tahansa. Sehän katoaa lausekkeesta rajojen sijoittamisen jälkeen.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Määrätyn integraalin laskusäännöt

Integraalien laskemista helpottavat seuraavat ominaisuudet.

Summa voidaan integroida termeittäin ja vakio voidaan siirtää integraalimerkin eteen:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b [cf(x)]\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad (c \text{ vakio}).$$

Näitä kutsutaan yhteisellä nimellä integraalin *lineaarisuudeksi*.

■ integraalifunktio

Integraali on myös *additiivinen integroimisvälin suhteen*:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Tulos on ilmeinen, jos $a < b < c$, mutta se on voimassa suuruusjärjestyksestä riipumatta, kun määritellään

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \text{ jos } a < b, \quad \text{ja} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

ESITIEDOT: ■ summa ja tulo, ■ integraalifunktio
KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa

Esimerkkejä määrätyn integraalin laskemisesta

■ sini
■ pinta-ala

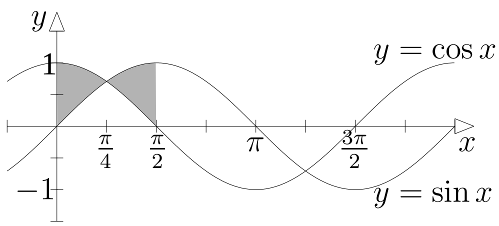
1) Funktio $\sin x$ on ei-negatiivinen välillä $[0, \pi]$. Kuvaajan $y = \sin x$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big/_{0}^{\pi} - \cos x = -(-1) - (-1) = 2.$$

■ käyrä (taso-)

2) Käyrät $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ rajaavat välillä $[0, \pi/2]$ kaksiosaisen alueen. Koska käyrät leikkaavat toisensa, kun $x = \pi/4$, on alueen pinta-ala laskettava kahdessa osassa:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) \, dx \\
= \quad & \Big/_{0}^{\pi/4} (\sin x + \cos x) + \Big/_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos x - \sin x) \\
= \quad & \tfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 + (-1) + \tfrac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

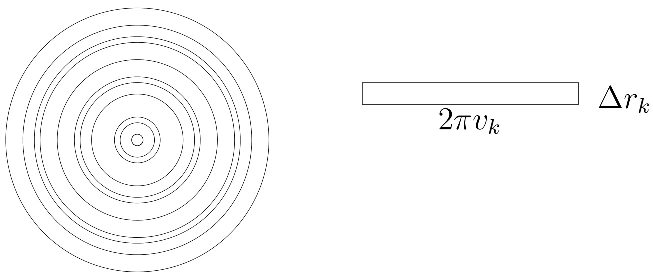


■ Sisältö
■ Hakemisto

Ympyrän alan laskeminen integroimalla

■ ympyrä (esimerkki)
■ ympyrä
■ ympyrä (ala)

R-säteisen ympyrän voidaan katsoa muodostuvan samankeskisistä ympyrärenkaista. Jos ympyrärengas, jonka sisäsäde on r_{k-1} ja ulkosäde r_k, leikataan poikki ja taivutetaan sisäreunaa sopivasti venyttäen ja ulkoreunaa sopivasti kuroen suoraksi nauhaksi, saadaan suorakulmio, jonka pinta-ala on täsmälleen sama kuin ympyrärenkaan pinta-ala. Suorakulmion leveys on tällöin $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$ ja pituus $2\pi v_k$, missä säde v_k on valittu sopivasta kohdasta: $r_{k-1} < v_k < r_k$.



Ympyrän ala on tällöin suorakulmioiden alojen summa: $\sum_{k=1}^{n} 2\pi v_k \Delta r_k$. Tämä on Riemannin summa, joka jakoa tihennettäessä, so. jaettaessa ympyrä yhä useampiin ja yhä kapeampiin ympyrärenkaisiin, lähenee integraalia

$$\int_0^R 2\pi r\,dr = \Big/_{\!0}^{R} \pi r^2 = \pi R^2.$$

Ei siis ole sattuma, että ympyrän pinta-alan derivaatta on sen kehän pituus!

■ Sisältö
■ Hakemisto

Määrätyn integraalin historiaa

Integraalin käsitettä voidaan lähestyä kahdesta näkökulmasta: Integrointi derivoinnin käänteistoimituksena ja integraali tietynlaisena summan raja-arvona. Analyysin peruslause kytkee nämä yhteen.

Historiallisesti jälkimmäinen, integraali summan raja-arvona, on vanhempi. Ensimmäiset merkit tähän suuntaan vievästä ajattelusta on löydettävissä jo vanhalta ajalta Eukleideen *Stoikheia*-teoksesta ja Arkhimedeen tarkasteluista eräiden pinta-alojen määrittämiseksi. Tällöin puhutaan ekshaustiomenetelmästä; määritettävä pinta-ala ikäänkuin tyhjennetään poistamalla siitä yhä pienempiä suorakulmioita tai muutoin pinta-alaltaan tunnettuja osia.

■ Eukleides
■ Arkhimedes
■ pinta-ala

Pohjois-Italiassa 1600-luvun alkupuolella tarkastelivat Galileo Galilei ja hänen oppilaansa Bonaventura Cavalieri kuvioiden muodostumista jakamattomista osista ('indivisiibeleistä'). Esimerkiksi kolmion voidaan katsoa muodostuvan sen yhden sivun suuntaisista janoista, jotka lyhenevät siirryttäessä kohden vastakkaista kärkeä. Tältä pohjalta määritettiin kuvioiden pinta-aloja. Arabimatemaatikoiden kehittämä algebra oli jo tällöin levinnyt Eurooppaan ja geometristen probleemojen käsittelyssä saatettiin käyttää myös algebrallisia menetelmiä.

■ Galilei
■ Cavalieri
■ algebra
■ geometria

1600-luvun loppupuolella aika oli kypsä meidän tuntemamme integraalilaskun syntymiseen. Englantilainen Isaac Newton loi derivoinnin ja sen käänteisoperaationa integroinnin. Samaan aikaan saksalaisen Gottfried Wilhelm Leibniz otti käyttöön määrätyn integraalin käsitteen summan raja-arvona. Molemmat tunsivat integraalilaskun kahden näkökulman välisen yhteyden. Integraalimerkintä $\int f(x)\,dx$ on peräisin Leibnizilta. Integraalimerkki on venytetty S, sanan summa alkukirjain.

■ geometria
■ Newton
■ Leibniz

Määrätyn integraalin täsmällinen määrittely sellaisena kuin se nykyään esitetään on kuitenkin peräisin vasta viime vuosisadalta ranskalaisen Augustin Louis Cauchyn ja saksalaisen Bernhard Riemannin töistä.

■ Cauchy
■ Riemann

Tämän jälkeenkin integraalikäsitettä on yleistetty. Yliopistollisissa peruskursseissa käsitellään yleensä Riemannin integraalia, jolla kuitenkin on rajoituksensa. Pidemmälle menevät matematiikan kurssit edellyttävät ranskalaisen Henri Lebesguen (1875 – 1941) mukaan nimettyä, hieman abstraktimpaa integraalikäsitettä.

■ Lebesgue