■ Sisältö
■ Hakemisto

Funktion kasvavuus ja vähenevyys; paikalliset ääriarvot

Jos derivoituvan reaalifunktion f derivaatta tietyssä pisteessä on positiivinen, $f'(x_0) > 0$, niin funktion tangentti tässä pisteessä on nouseva ja funktio siis on aidosti kasvava pisteen kohdalla: jos riittävän pienessä pisteen x_0 ympäristössä on $x_1 < x_0 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. (Varovaisuus on tarpeen: Tämä ei ole sama kuin funktion kasvavuus kyseisessä ympäristössä. Hyvä — mutta hieman vaikea — esimerkki on kaikkialla derivoituva funktio $f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ pisteessä $x_0 = 0$.)

■ derivoituvuus
■ funktio (reaali-)
■ derivaatta
■ tangentti (suora)
■ kasvava (funktio)
■ vähenevä (funktio)

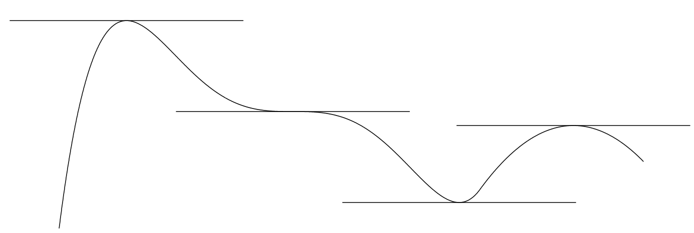
Vastaavasti jos derivaatta on negatiivinen, $f'(x_0) < 0$, niin funktio on kohdassa x_0 aidosti vähenevä.

Funktiolla f sanotaan olevan *paikallinen maksimi* pisteessä x_0, jos funktion arvo $f(x_0)$ on suurempi kuin sen arvot pisteen x_0 välittömässä ympäristössä. Vastaavasti määritellään *paikallinen minimi*.

Paikallista maksimia ja minimiä kutsutaan funktion *paikallisiksi ääriarvoiksi*; vastaava muuttujan arvo x_0 on *ääriarvokohta*.

Jos funktio f on ääriarvokohdassa x_0 derivoituva (mitä sen ei tarvitse olla, esim. $f(x) = |x|$ origossa), on sen derivaatta välttämättä $= 0$. Jos derivaatta nimittäin olisi > 0 tai < 0, olisi funktio edellä sanotun mukaan aidosti kasvava tai vähenevä pisteen ympäristössä eikä kyseessä olisikaan ääriarvo.

Ääriarvokohdassa derivoituvan funktion kuvaajalla on siis vaakasuora tangentti. Tangentti voi olla vaakasuora muuallakin kuin ääriarvokohdassa, kuten alla oleva kuva osoittaa. Yhtälö $f'(x) = 0$ antaa siis derivoituvalle funktiolle *mahdolliset* ääriarvokohdat, mutta yhtälön ratkaisujen joukossa voi olla arvoja, jotka eivät ole ääriarvokohtia.



ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ derivaatta
KATSO MYÖS: ■ funktion jatkuvuus, ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

■ Sisältö
■ Hakemisto

Ääriarvon laadun tutkiminen

Oletetaan seuraavassa, että funktio f on derivoituva ja että $f'(x_0) = 0$. Oletetaan lisäksi, että x_0 on derivaatan erillinen nollakohta, ts. pisteellä x_0 on ympäristö, jossa $f'(x) \neq 0$ (paitsi tietenkin keskipisteessä x_0).

■ derivaatta
■ derivoituvuus

Kohtaa x_0 ohitettaessa derivaatan merkki voi 1) muuttua positiivisesta negatiiviseksi, 2) negatiivisesta positiiviseksi, 3) jäädä muuttumatta.

■ kasvava (funktio)
■ vähenevä (funktio)

Ensimmäisessä tapauksessa funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi, jolloin kyseessä on maksimikohta; toisessa tapauksessa kyseessä on vastaavasti minimikohta. Jos merkki jää muuttumatta, on derivaatta samanmerkkinen pisteen x_0 kummallakin puolella. Jos se on positiivinen, on funktio kasvava pisteen kummallakin puolella; jos negatiivinen, niin funktio on vähenevä. Kummassakaan tapauksessa ei kyseessä voi olla ääriarvokohta.

■ derivaatta (toinen)

Ääriarvon laatu voidaan tutkia myös toista derivaattaa käyttäen. Olkoon $f'(x_0) = 0$. Jos $f''(x_0) < 0$, niin ensimmäinen derivaatta on kohdassa x_0 vähenevä ja sen merkki siis muuttuu positiivisesta negatiiviseksi. Kyseessä on edellä olevan mukaan maksimi. Vastaavasti $f''(x_0) > 0$ merkitsee, että kyseessä on minimi.

Jos $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, ei ääriarvon laatua tai sen olemassaoloa voida ilman lisätietoja päätellä. Kaikki on mahdollista. Esimerkiksi funktioilla x^4, $-x^4$ ja x^3 on sekä ensimmäinen että toinen derivaatta origossa $= 0$. Ensimmäisellä on origossa minimi, toisella maksimi, kolmannella origo ei ole ääriarvokohta.

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ derivaatta

KATSO MYÖS: ■ funktion jatkuvuus, ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

---

Absoluuttinen maksimi ja minimi

Funktion *suurin* ja *pienin arvo* eli *absoluuttinen maksimi* ja *absoluuttinen minimi* argumentin ollessa reaaliakselin suljetulla välillä löydetään etsimällä paikalliset ääriarvot ja tarkastelemalla funktion käyttäytymistä välin päätepisteissä. Edellytyksenä on, että funktio on välillä derivoituva (jolloin se on myös jatkuva).

■ suljettu väli
■ derivoituvuus
■ jatkuvuus

Menettely on seuraava:

1. Etsitään funktion derivaatan nollakohdat tarkasteluvälillä ja lasketaan vastaavat funktion arvot. Kaikki nollakohdat eivät välttämättä ole ääriarvokohtia, mutta tällä ei menettelyssä ole merkitystä. Myöskään ääriarvojen laatua (maksimi, minimi) ei tarvitse tutkia.

2. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

3. Suurin saaduista arvoista on funktion maksimiarvo, pienin minimiarvo.

Jos tarkasteluväli on avoin, on lisäksi raja-arvotarkasteluilla tutkittava funktion käyttäytymistä lähestyttäessä välin päätepisteitä (tai äärettömyyttä, jos väli on rajoittamaton). Jos funktio ei joissakin pisteissä ole derivoituva tai edes jatkuva, on tutkittava raja-arvot myös näitä pisteitä lähestyttäessä.

■ avoin väli
■ raja-arvo (funktion)

Tällöin on mahdollista, että funktiolla ei ole maksimia tai minimiä, so. suurinta tai pienintä arvoa, jonka funktio saisi jossakin pisteessä. Sen sijaan voidaan ehkä löytää funktion arvoille *pienin yläraja* tai *suurin alaraja*, so. mahdollisimman ahtaat rajat, joiden välissä funktion arvot ovat. Toisena mahdollisuutena on, että funktio on rajoittamaton ylhäältä tai alhaalta, so. saa miten suuria tai miten pieniä arvoja tahansa. (Tällöin sanotaan, että funktion pienin yläraja on ∞ ja suurin alaraja $-\infty$.)

On syytä huomata, että edellä olevaa menettelyä ei luonnollisestikaan tarvitse orjallisesti noudattaa, jos asia on pääteltävissä yksinkertaisemmin. Esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

maksimi- ja minimiarvo reaaliakselilla ovat ilmeisestikin 1 ja $1/3$, koska sinin pienin arvo on -1 (mikä vastaa funktion f suurinta arvoa) ja suurin arvo $+1$ (vastaten funktion f pienintä arvoa). Minkäänlainen derivointi ei siis tässä ole tarpeen.

■ sini

■ Sisältö
■ Hakemisto

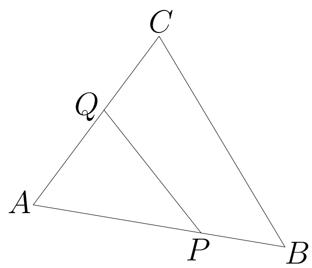
ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ derivaatta
KATSO MYÖS: ■ funktion jatkuvuus, ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

---

Esimerkki 1 maksimien ja minimien laskemisesta

Kolmion ABC sivulla AB sijaitsee piste P ja sivulla AC piste Q. Jana PQ jakaa kolmion kahteen yhtä suureen osaan. On etsittävä janan PQ pituuden suurin ja pienin arvo.

■ kolmio
■ kolmio (ala)



Olkoon kärjessä A sijaitseva kolmion kulma α ja merkitään sivujen pituuksia $b = |AB|$, $c = |AC|$, $x = |AP|$, $y = |AQ|$. Koska kolmion APQ ala on puolet kolmion ABC alasta, saadaan ehto $\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, mistä seuraa $y = \frac{bc}{2x}$.

■ trigonometrinen funktio (suorakulmaisessa kolmiossa)

Probleemassa voidaan ottaa muuttujaksi x, jolle ehdoista $0 < x \leq b$ ja $0 < y \leq c$ saadaan rajoitukset $b/2 \leq x \leq b$.

Tutkittavaksi funktioksi on yksinkertaisinta ottaa janan PQ pituuden neliö, joka kosinilauseen mukaan on

■ kosinilause

$$s^2 = f(x) = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = x^2 + \frac{b^2c^2}{4x^2} - bc\cos\alpha.$$

Funktio on tarkasteluvälillä derivoituva, joten riittää tutkia derivaatan nollakohdat ja välin päätepisteet. Derivaatan $f'(x) = 2x - \frac{b^2c^2}{2x^3}$ ainoa positiivinen nollakohta on $x_0 = \sqrt{\frac{bc}{2}}$.

■ derivaatta
■ derivoituvuus
■ derivointi (alkeisfunktioiden)

Funktion arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä ovat $f(x_0) = bc - bc\cos\alpha$, $f(\frac{b}{2}) = \frac{b^2}{4} + c^2 - bc\cos\alpha$, $f(b) = b^2 + \frac{c^2}{4} - bc\cos\alpha$. Näistä arvoista ensimmäinen on pienin, sillä $f(\frac{b}{2}) - f(x_0) = \left(\frac{b}{2} - c\right)^2 \geq 0$, $f(b) - f(x_0) = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 \geq 0$.

Ei ole kuitenkaan selvää, että x_0 sijaitsee tarkasteluvälillä; tämä riippuu sivujen pituuksien b ja c suhteesta. Ehdosta $b/2 \leq x_0 \leq b$ seuraa nimittäin $b/2 \leq c \leq 2b$; jos tämä ehto on täytetty, antaa x_0 minimin ja maksimi saadaan jommassakummassa päätepisteessä (riippuen sivujen pituuksien b ja c suhteesta). Jos ehto ei ole täytetty, ei derivaatalla ole lainkaan nollakohtia tarkasteluvälillä ja toinen päätepiste antaa maksimin, toinen minimin.

Esimerkki 2 maksimien ja minimien laskemisesta

■ keskiarvo (aritmeettinen)
■ keskiarvo (geometrinen)

Olkoot $x_1, \ldots, x_p$ positiivilukuja. Näiden *aritmeettinen keskiarvo* ja *geometrinen keskiarvo* ovat

$$M_a = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p},$$

$$M_g = \sqrt[p]{\prod_{k=1}^{p} x_k} = \sqrt[p]{x_1 x_2 \ldots x_p}.$$

On osoitettava, että $M_a \geq M_g$ ja että yhtäsuuruus esiintyy vain, kun kaikki luvut ovat yhtä suuria.

■ logaritmifunktio
■ derivointi (alkeisfunktioiden)
■ raja-arvo (standardi-, funktion)

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x - \ln x - 1$, missä $x > 0$. Tämän derivaatta $f'(x) = 1 - 1/x$ on $= 0$ pisteessä $x = 1$.

Koska $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ ja standardiraja-arvona $\lim_{x\to\infty} x - \ln x = \lim_{x\to\infty} \ln(e^x/x) = \infty$, ovat funktion raja-arvot tarkastelualueen päätepisteissä $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Piste $x = 1$ antaa siis funktion minimiarvon $f(1) = 0$, ts. $x - \ln x - 1 \geq 0$ kaikilla x. Koska muita derivaatan nollakohtia ei ole, minimiarvo saadaan vain tässä pisteessä.

Sovelletaan saatua tulosta lukuihin x_k/M_a ja lasketaan epäyhtälöt puolittain yhteen:

$$\frac{x_k}{M_a} - \ln\frac{x_k}{M_a} - 1 \geq 0, \quad k = 1, \ldots, p,$$

ja siis

$$\frac{1}{M_a}\sum_{k=1}^{p} x_k - \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{p} x_k}{M_a^p}\right) - p \geq 0.$$

Lausumalla summa ja tulo keskiarvojen avulla sekä jakamalla luvulla p saadaan

$$-\ln\frac{M_g}{M_a} \geq 0,$$

mistä seuraa $M_a \geq M_g$. Päättelyssä vallitsee yhtäsuuruus, jos alussa sovelletussa epäyhtälössä on $x = 1$ eli $x_k = M_a$ kaikilla indekseillä k; tämä merkitsee lukujen x_k yhtäsuuruutta.