ESITIEDOT: ■ yhtälöt, ■ lukujonon raja-arvo, ■ derivaatta
KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt, ■ transkendenttiyhtälöt

■ Sisältö
■ Hakemisto

Newtonin iteraatiomenetelmän idea

Muotoon $f(x) = 0$ saatettu yhtälö voidaan usein ratkaista numeerisesti *Newtonin iteraatioksi* kutsutulla menettelyllä. Edellytyksenä on, että etsittävän juuren ympäristössä funktio on kahdesti derivoituva (ts. ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat olemassa) ja $f'(x) \neq 0$. Juurelle tulee tuntea myös riittävän tarkka approksimaatio, ns. iteraation lähtöarvo.

■ yhtälö
■ juuri (yhtälön)
■ derivaatta
■ derivaatta (toinen)

Menettelyssä muodostetaan lukujono, jonka ensimmäinen luku on lähtöarvo ja jossa seuraava luku aina lasketaan edellisen perusteella. Jono suppenee kohden juurta ja tälle voidaan laskea niin tarkka likiarvo kuin halutaan muodostamalla jonon lukuja riittävän pitkälle.

■ lukujono
■ rekursiivisesti määritelty lukujono
■ suppeneminen (lukujonon)

Newtonin iteraatiolla saadaan vain yksi juuri kerrallaan. Jos yhtälöllä on useampia juuria, on vaihdettava lähtöarvoa ja laskettava uudelleen. Syntyvä lukujono ei välttämättä suppene kohden lähintä juurta. Itse asiassa se ei välttämättä suppene lainkaan. Mikäli kuitenkin aloitetaan riittävän läheltä juurta, saadaan yleensä tätä juurta kohden suppeneva jono. 'Riittävän läheltä' riippuu siitä, millainen funktio f on.

Nimitys 'iteraatio' tarkoittaa toistamiseen perustuvaa menettelyä. Newtonin iteraatiossa toistetaan samaa laskenta-askelta: muodostettavan lukujonon seuraava termi lasketaan aina edellisen avulla. Menettelyn on esittänyt Isaac Newton vuoden 1670 tienoilla. Se tunnetaan myös Newtonin–Raphsonin menetelmänä.

■ Newton

ESITIEDOT: ■ yhtälöt, ■ lukujonon raja-arvo, ■ derivaatta
KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt, ■ transkendenttiyhtälöt

■ Sisältö
■ Hakemisto

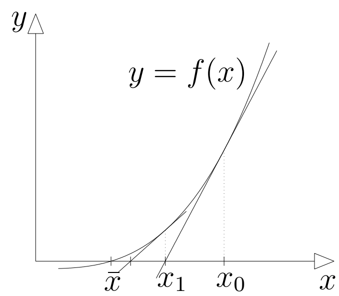
Newtonin iteraation kaavat

Newtonin menetelmä voidaan johtaa seuraavasti:

Olkoon yhtälöllä $f(x) = 0$ juurena $\bar{x}$ ja olkoon x_0 tämän approksimaatio, ts. iteraation lähtöarvo. Käyrälle $y = f(x)$ asetetaan tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Tämän yhtälö on

■ yhtälö
■ juuri (yhtälön)
■ käyrä (taso-)
■ tangentti (suora)
■ suora (yhtälö)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Tangentti leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$ ja siis

■ derivaatta
■ differentiaali

$$x = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Tämä on kuvion mukaisesti (yleensä) tarkempi approksimaatio juurelle $\bar{x}$ kuin x_0.

Askel toistetaan pitäen saatua arvoa x_1 uutena lähtöarvona, jolloin saadaan jälleen tarkempi approksimaatio x_2. Näin jatketaan ja saadaan muodostetuksi lukujono x_0, x_1, x_2, x_3, $\ldots$.

■ lukujono
■ rekursiivisesti määritelty lukujono

Yleisesti laskentaprosessi voidaan esittää iteraatiokaavana:

$$\begin{aligned}&\text{annettuna } x_0;\\ &x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ .\end{aligned}$$

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki Newtonin iteraatiosta

Esimerkkinä olkoon yhtälön $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ avoimella välillä $]2, 3[$ olevan juuren etsiminen. Ainakin yksi tällainen on olemassa, sillä $f(2) = -1$, $f(3) = 16$ ja funktio f on jatkuva.

■ yhtälö (polynomi-)
■ avoin väli
■ juuri (yhtälön)
■ jatkuvuus

Newtonin menetelmän iteraatiokaavaksi saadaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}.$$

Jos alkuarvoksi valitaan $x_0 = 2$, antaa iterointi seuraavaa:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 2.1 \\
x_2 &= 2.094568 \\
x_3 &= 2.09455148170 \\
x_4 &= 2.09455148154233 \\
x_5 &= 2.09455148154233 \\
x_6 &= 2.09455148154233
\end{aligned}$$

Lukujono siis näyttää suppenevan.

Cardanon kaavojen avulla voidaan tässä tapauksessa saada juurelle myös tarkka arvo:

$$\bar{x} = \sqrt[3]{\frac{45 + \sqrt{1929}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{45 - \sqrt{1929}}{18}}.$$

■ lukujono
■ suppeneminen (lukujonon)
■ Cardanon kaavat

■ Sisältö
■ Hakemisto

Vaihtoehtoinen tapa johtaa iteraatiokaavat

Newtonin menetelmä voidaan johtaa myös differentiaalin käsitteen avulla. Differentiaalikehitelmä

■ differentiaali

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(x_0, h)$$

saa muodon

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0),$$

kun merkitään $x = x_0 + h$. Mitä pienempi $h = x - x_0$ on, sitä merkityksettömämpi on korjaustermi $(x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0)$ ja yhtälö $f(x) = 0$ voidaan korvata approksimatiivisella yhtälöllä $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Ratkaisemalla tästä x saadaan juuri Newtonin menetelmän mukainen parannettu approksimaatio x_1.