

Nopeus ja kiihtyvyys

ESITIEDOT: ■ derivaatta

KATSO MYÖS:

1/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

Hetkellinen nopeus ja kiihtyvyys

Keskinopeus v on kuljettu matka Δs jaettuna vastaavalla ajalla Δt :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Lähtöhetken jälkeen kuljettu matka on ajan funktio: $s = s(t)$. Kulkunopeuden ei tarvitse olla vakio. Aikaväliä $[t, t + \Delta t]$ vastaava matka on tällöin $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ ja keskinopeus siis

$$v = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Jos tarkastellaan yhä lyhyempää aikaväliä, ts. $\Delta t \rightarrow 0$, saadaan *hetkellinen nopeus* hetkellä t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Hetkellinen nopeus on siis kuljetun matkan derivaatta ajan suhteen.

Kyseessä voi olla muukin kuin kulkunopeus. Esimerkiksi vesisäiliötä täytettäessä vesimäärän tilavuus muuttuu ajan mukana: $V = V(t)$. Keskimääräinen täyttymisnopeus aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ on tilavuuden muutos jaettuna vastaavalla ajalla:

$$\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t};$$

esimerkiksi tietty määrä kuutiometrejä sekunnissa. Jos $\Delta t \rightarrow 0$, tästä saadaan hetkellinen täyttymisnopeus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V'(t).$$

Yleisesti: Ajan mukana muuttuvan suureen muuttumisnopeus on sen derivaatta ajan suhteen.

Kiihtyvyys tarkoittaa nopeuden v muuttumisnopeutta. Keskikihtyvyys aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ on siten

$$a = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

ja *hetkellinen kiihtyvyys* $a(t) = v'(t)$. Jos kyseessä on liikkuva kappale, jonka kulkema matka on $s(t)$, on siis $a(t) = s''(t)$.

■ erotusosamäärä

■ derivaatta

■ derivaatta (toinen)

Nopeus ja kiihtyvyys

ESITIEDOT: ■ derivaatta

KATSO MYÖS:

2/2

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki nopeuden laskemisesta

Pallonmuotoista ilmapalloa täytetään kokoonpuristumattomalla kaasulla, joka virtaa vakionopeudella $0.5 \text{ dm}^3/\text{s}$. Millä nopeudella pallon säde kasvaa sillä hetkellä, kun säteen suuruus on 20 cm ?

Sekä pallon säde että tilavuus ovat ajan t funktioita:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3.$$

Derivoimalla ajan suhteen yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen saadaan

$$V'(t) = 4\pi r(t)^2 r'(t).$$

Tässä $V'(t)$ on tilavuuden kasvunopeus ja $r'(t)$ säteen kasvunopeus. Esimerkitapauksessa tunnetaan kaasun virtausnopeus, ts. pallon tilavuuden kasvunopeus ja saadaan siis

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r(t)^2} = \frac{500 \text{ cm}^3/\text{s}}{4\pi \cdot 20^2 \text{ cm}^2} \approx 1 \text{ mm/s}.$$

■ pallo
■ pallo (tilavuus)
■ pallo (ala)

■ derivaatta (yhdistetyn funktion)

■ derivointi (alkeisfunktioiden)