

## Pythagoraan lause

ESITIEDOT: ■ kolmio

KATSO MYÖS: ■ vektorigeometriaa

1/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Pythagoraan lause

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien  $a$  ja  $b$  neliöiden summa on hypotenuusan pituuden  $c$  neliö:

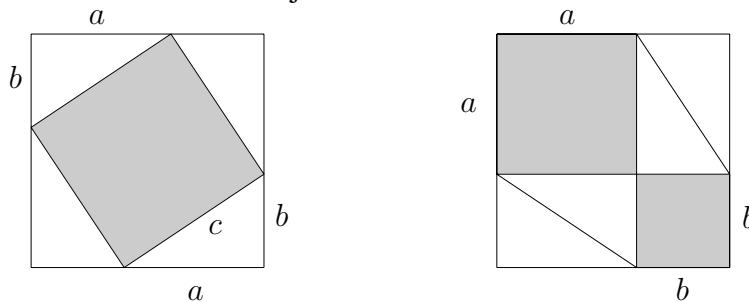
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

■ kolmio

■ kateetti

■ hypotenuusa

Lause voidaan alkeellisesti todistaa tarkastelemalla neliötä, jonka sivun pituus on  $a + b$  ja piirtämällä sen sisään neljä suorakulmaista kolmiota kahdella eri tavalla:



Varjostetut alueet ovat neliöitä, joiden alat ovat  $a^2$ ,  $b^2$  ja  $c^2$ . Näiden ulkopuolelle jäävä alue kummassakin isossa neliössä on sama, neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota, jolloin myös varjostettujen alueiden alat ovat samat:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Lause voidaan todistaa myös vektorialgebralla: Jos  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat kateettien vektoriesitykset, niin hypotenuusa on  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Hypotenuusan pituuden neliö on tällöin

■ geometria (vektori-)

■ skalaaritulo

$$c^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2 + b^2,$$

koska  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  kolmion suorakulmaisuuuden takia.

Pythagoraan lause on erikoistapaus kosinilauseesta.

■ kosinilause

## Pythagoraan lause

ESITIEDOT: ■ kolmio

KATSO MYÖS: ■ vektorigeometriaa

2/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Muistikolmiot

Soveltamalla Pythagoraan lausetta tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon, jossa kummankin kateetin pituus on  $a$  ja hypotenuusan pituus on  $x$ , saadaan

$$a^2 + a^2 = x^2,$$

jolloin  $x = a\sqrt{2}$ .

Jos tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on  $2a$ , jaetaan korkeusjanalla kahtia, saadaan kaksi suorakulmaista kolmiota, joissa hypotenuusan pituus on  $2a$  ja lyhyempi kateetti symmetrian takia  $a/2$ . Jos pitempi kateetti eli kolmion korkeusjana on  $x$ , Pythagoraan lause antaa

$$a^2 + x^2 = 4a^2,$$

mistä seuraa  $x = a\sqrt{3}$ .

Saadaan siis seuraavat tulokset:

Jos suorakulmaisen kolmion molemmat terävät kulmat ovat 45 astetta, niin kateettien ja hypotenuusan suhde on  $1 : 1 : \sqrt{2}$ .

Jos suorakulmaisen kolmion terävät kulmat ovat 30 ja 60 astetta, niin kateettien ja hypotenuusan suhde on  $1 : \sqrt{3} : 2$ .

■ tasakylkinen

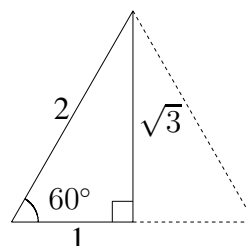
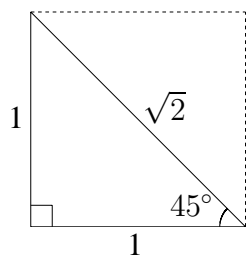
■ kateetti

■ hypotenuusa

■ tasasivuinen

■ korkeusjana

■ kulma  
(terävä)



## Pythagoraan lause

ESITIEDOT: ■ kolmio

KATSO MYÖS: ■ vektorigeometriaa

3/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

---

### Pythagoraan lauseen historiaa

Thales Miletolainen ja Pythagoras Samoslainen ovat varhaisimmat tunnetut kreikkalaiset matemaatikot. He olivat lähtöisin Aigeian meren ääreltä ja elivät 500-luvulla ennen ajanlaskumme alkua, Thales hieman Pythagorasta aiemmin. Kumpikin ilmeisesti matkusteli Kaksoisvirranmaassa ja Egyptissä, joista Kreikkaan kulkeutui myös matematiikkaan ja laskemiseen liittyviä vaikutteita. Kummaltakaan ei ole kuitenkaan säilynyt kirjoitettuja tekstejä, vaan käsitykset heistä ovat enintäänkin toisen käden tietojen varassa.

■ Thales

■ Pythagoras

Pythagoras oli filosofi, matemaatikko ja lukumystikko, joka keräsi ympärilleen koulukunnan Krotoniin nykyiseen Kaakkois-Italiaan. Tarkkaa tietoa koulukunnan matemaattisesta merkityksestä ei ole. Pythagoraan lauseena tunnettu tulos oli laskumenettelynä tunnettu jo Kaksoisvirranmaassa. Geometrinen tulosten deduktiivinen todistaminen on kreikkalaisilta peräisin, mutta pythagoralaisten osuudesta ajatuksen kehittymiseen ei ole tietoa. Mahdollisesti todistamisen idea on syntynyt vasta muutamia vuosisatoja myöhemmin.

Egyptin ja Kaksoisvirranmaan matematiikka oli käytännöllisistä tehtävistä lähtevää laskemista: maanmittausta, pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämistä, perinnönjakoja, jne. Abstrakti matematiikka syntyi Kreikassa.