ESITIEDOT: ■ summa ja tulo, ■ lukujonot, ■ lukujonon raja-arvo
KATSO MYÖS: ■ Neperin luku e, ■ luku π

■ Sisältö
■ Hakemisto

Sarjan käsite ja suppeneminen

Olkoon annettuna äärettömän monen termin lukujono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$. Kun jonon kaikki termit lasketaan yhteen, saadaan *sarja*

■ lukujono

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Termien indeksoinnin alkukohta voi olla muukin kuin 1.

Äärettömän monen termin yhteenlaskeminen on kuitenkin ongelmallista. Jotta operaatio saadaan täsmällisesti määritellyksi, on meneteltävä seuraavasti.

Muodostetaan sarjan *osasummat*, so. äärellisen monen termin summat, joihin otetaan termejä alusta lähtien jokin äärellinen määrä:

■ summa
■ summamerkintä

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

jne. Yleisesti on n:s osasumma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Osasummat $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$ muodostavat lukujonon. Jos tämä suppenee ja sen raja-arvo on $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, sanotaan, että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee* ja sen *summa* on s.

■ raja-arvo (lukujonon)

Jos sarja ei suppene, sen sanotaan *hajaantuvan*. Hajaantuvalla sarjalla siis jonon s_1, s_2, s_3, $\ldots$ luvut joko heilahtelevat mitään arvoa lähestymättä tai karkaavat äärettömyyteen.

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, ts. suppenevalla sarjalla termit lähestyvät nollaa indeksin kasvaessa. Tämä nähdään helposti: Koska

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1},$$

on $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Voisi luulla, että myös käänteinen olisi voimassa. Näin ei kuitenkaan ole. Vaikka olisikin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, sarja voi silti hajaantua. Esimerkki (harmoninen sarja) edempänä.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki 1 sarjoista

Sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

alkupään osasummat ovat

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}, \\ s_2 &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{2}{5}, \\ s_3 &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{3}{7}, \\ s_4 &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Näiden perusteella on arvattavissa osasumman yleinen lauseke

$$s_n = \frac{n}{2n+1};$$

tämä voidaan myös todistaa oikeaksi matemaattisella induktiolla.

Koska $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$, niin sarja suppenee ja sen summa on $\frac{1}{2}$.

Ks. myös lukujen e ja π sarjakehitelmiä.

■ induktio (matemaattinen)
■ raja-arvo (lukujonon)
■ Neperin luku (sarja)
■ pii (sarja)

Esimerkki 2 sarjoista

Sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

kutsutaan *harmoniseksi sarjaksi*. Sen osasummalle s_n ei voida esittää lauseketta, mutta sarja voidaan päätellä hajaantuvaksi seuraavalla tavalla.

Koska kaikki harmonisen sarjan termit ovat positiivisia, on osasummien jono kasvava: $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \ldots$. Osasummalle, jonka indeksi on $n = 2^p$, pätee seuraava:

$$\begin{aligned} s_{2^p} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^p} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \\ &\qquad + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \ldots . \end{aligned}$$

Pienennetään tässä esityksessä jokaisen termiryhmän termejä siten, että ne korvataan ryhmän viimeisellä termillä. Koska ryhmissä on termejä jonkin kakkosen potenssin osoittama määrä, päädytään seuraavaan:

$$s_{2^p} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \ldots + 2^{p-1} \cdot \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{p}{2}.$$

Antamalla $p \to \infty$ saadaan

■ raja-arvo (lukujonon)

$$\lim_{p\to\infty} s_{2^p} > \lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{p}{2}\right) = \infty.$$

Sarja siis ilmeisestikin hajaantuu.

Huomattakoon, että harmonisen sarjan termit lähestyvät nollaa, ts.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

mutta siitä huolimatta sarja hajaantuu.

Esimerkki osoittaa, että sarjojen suppenemisen tutkiminen ja niiden summien määrittäminen ei ole aivan yksinkertaista.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Geometrinen sarja

Lähes ainoa sarjatyyppi, jonka suppeneminen ja summa voidaan alkeellisin keinoin selvittää on *geometrinen sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Tämän osasumma on geometrinen summa

■ geometrinen summa

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{jos } q \neq 1.$$

Jos $q = 1$, on $s_n = n + 1$.

Jos $|q| < 1$, on osasummalla s_n raja-arvo

■ raja-arvo (lukujonon)

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

Jos $q \geq 1$, karkaavat osasummat äärettömyyteen. Jos $q \leq -1$, heilahtelevat osasummat mitään raja-arvoa lähestymättä.

Geometrinen sarja siis suppenee, jos ja vain jos $|q| < 1$. Tällöin sen summa on

$$s = \frac{1}{1-q}.$$