ESITIEDOT: ■ trigonometriset funktiot

KATSO MYÖS:

■ Sisältö
■ Hakemisto

Ulkoa muistettavat peruskaavat

Trigonometrisia funktioita koskevia kaavoja on paljon. Seuraavassa esitetään tärkeimmät ja lyhyet ohjeet niiden muistamiseen. Varsinaisesti ulkoa opeteltavia kaavoja lienee vain kolme: sinin ja kosinin neliösumma on $= 1$, sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat.

■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
■ sini
■ kosini

On huomattava, että kaavoja usein tarvitaan myös oikealta vasemmalle luettuina. Jonkin lausekkeen sieventäminen nimittäin saattaa edellyttää sen tunnistamista jonkin kaavan vasemman tai oikean puolen tyyppiä olevaksi.

Sinin ja kosinin määrittely yksikköympyrän avulla antaa kaikilla kulmilla x voimassa olevan *sinin ja kosinin peruskaavan*

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Vektorialgebraa, lähinnä skalaari- ja vektorituloa käyttäen saadaan *sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat*:

■ skalaaritulo
■ vektoritulo

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}}$$

Vastaavat vähennyslaskukaavat $\sin(x-y) = \ldots$ ja $\cos(x-y) = \ldots$ saadaan edellä olevista kirjoittamalla y:n paikalle $-y$ ja käyttämällä kaavan oikealla puolella hyväksi sinifunktion parittomuutta ja kosinifunktion parillisuutta.

■ pariton (funktio)
■ parillinen (funktio)
■ trigonometrinen funktio (symmetria)
■ supistaminen

Jakamalla nämä kaavat puolittain ja supistamalla oikea puoli lausekkeella $\cos x \cos y$ saadaan *yhteenlaskukaava tangentille*

$$\boxed{\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}}$$

(Tämän kaavan ulkoa opetteluun tuskin on tarvetta. Kaavan johto, so. sinin ja kosinin kaavojen puolittainen jakaminen ja senjälkeinen supistaminen on tehtävissä varsin nopeasti.)

■ Sisältö
■ Hakemisto

Helposti johdettavat kaavat

Kaksinkertaisen argumentin kaavat saadaan asettamalla sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoihin $y = x$ ja käyttämällä kosinin tapauksessa hyväksi peruskaavaa muodossa $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ja $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

■ sini
■ kosini

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}}$$

Harvemmin tarvittavia ovat seuraavat kaavat:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}}$$

Nämä saadaan johdetuiksi sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen avulla seuraavaan tapaan: Laskemalla yhteen kaavat

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

saadaan

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Sijoittamalla tähän $x = \alpha+\beta$ ja $y = \alpha-\beta$, jolloin $\alpha = \frac{1}{2}(x+y)$ ja $\beta = \frac{1}{2}(x-y)$, päädytään ryhmän ensimmäiseen kaavaan. Muut saadaan vastaavasti.

Kaksinkertaisen kulman kosinin kaavoista $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ja $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ saadaan sinin ja kosinin neliöt ratkaisemalla

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{aligned}}$$

■ Sisältö
■ Hakemisto

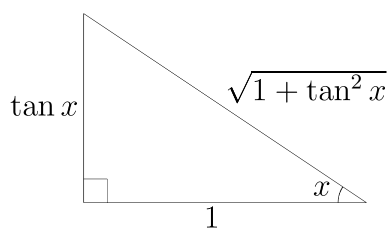
ESITIEDOT: ■ trigonometriset funktiot
KATSO MYÖS:

Trigonometristen funktioiden lausuminen toistensa avulla

■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
■ kolmio

Mikä tahansa trigonometrinen funktio voidaan lausua minkä tahansa muun trigonometrisen funktion avulla. Nämä kaavat voidaan johtaa käyttämällä edellä johdettuja kaavoja hyväksi, mutta helpoimmin ne voidaan löytää tarkastelemalla sopivaa suorakulmaista kolmiota.

Olkoon esimerkkinä muiden funktioiden lausuminen tangentin avulla.



■ kulma (terävä)
■ kateetti
■ hypotenuusa
■ Pythagoraan lause

Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka toinen terävä kulma on x ja tämän viereisen kateetin pituus 1. Vastainen kateetti on tällöin $\tan x$ tangentin määritelmän mukaan ja hypotenuusa $\sqrt{1+\tan^2 x}$ Pythagoraan lauseen mukaan. Kolmiosta voidaan lukea suoraan muut trigonometriset funktiot:

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$$

■ neliöjuuri

Päättelyssä on luonnollisestikin $0 < x < \pi/2$. Tulos on kuitenkin pätevä muillekin kulmille x, kun neliöjuurten eteen lisätään $\pm$-merkit. Siis

$$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$$

■ trigonometrinen funktio (merkkikaavio)

Kumpi merkki on oikea, riippuu siitä yksikköympyrän neljänneksestä, missä kulma x on. Se on siis pääteltävä erikseen jokaisessa yksityistapauksessa esimerkiksi trigonometristen funktioiden merkkikaavioiden avulla.

Samantyyppisellä menettelyllä voidaan trigonometriset funktiot lausua muunkin funktion kuin tangentin avulla. Tällöin on vain valittava sopivasti sivu, jonka pituudeksi otetaan 1.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Trigonometriset yhtälöt

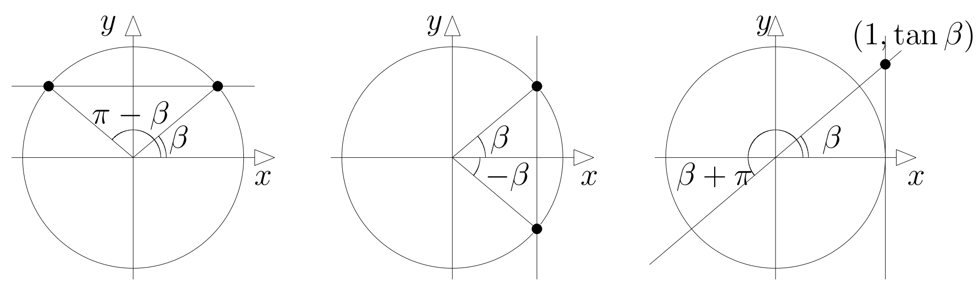
■ yhtälö (transkendentti-)
■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
■ jaksollinen (funktio)

Trigonometristen yhtälöiden ratkaisemisessa pyritään yhtälöä sieventämään trigonometrian kaavojen avulla. Tavoitteena on esimerkiksi saattaa yhtälö muotoon $\sin f(x) = \sin g(x)$ tai vastaavaan jonkin muun trigonometrisen funktion sisältävään muotoon.

Näistä yhtälöistä voidaan pudottaa trigonometrinen funktio pois ottamalla huomioon funktion symmetriaominaisuudet ja jaksollisuus. Eri funktioiden tapauksissa tämä merkitsee seuraavaa:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha = \sin\beta &\quad\Longrightarrow\quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\\
\cos\alpha = \cos\beta &\quad\Longrightarrow\quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi,\\
\tan\alpha = \tan\beta &\quad\Longrightarrow\quad \alpha = \beta + k\pi.
\end{aligned}$$

Symboli k tarkoittaa kaikkialla mitä tahansa kokonaislukua.



Esimerkki 1 trigonometrisesta yhtälöstä

Yhtälö $\sin 2x = \cos x$ voidaan ratkaista kahdellakin tavalla.

1) Sinin kaksinkertaisen kulman kaavan avulla yhtälö saadaan muotoon $2\sin x \cos x = \cos x$, mikä ilmeisesti toteutuu, jos $\cos x = 0$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$.

■ sini
■ kosini

Koska $\cos(\pi/2) = 0$, vastaa edellinen tapaus yhtälöä $\cos x = \cos(\pi/2)$, mistä seuraa $x = \pm\pi/2 + 2k\pi$. Tämä voidaan myös kirjoittaa muotoon

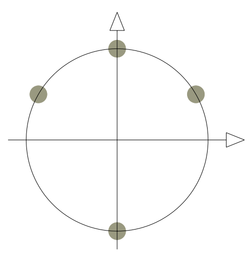
$$x = \pi/2 + n\pi.$$

Luvut k ja n ovat kokonaislukuja.

Koska $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, saadaan jälkimmäisestä vaihtoehdosta $\sin x = \sin(\pi/6)$, jolloin

$$x = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \pi/6 + 2k\pi = 5\pi/6 + 2k\pi.$$

Yhden kierroksen alueella on siis seuraavan kuvion mukaiset juuret:



2) Yhtälö voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa muotoon $\sin 2x = \sin(\pi/2 - x)$, jolloin saadaan

$$2x = \pi/2 - x + 2k\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - (\pi/2 - x) + 2k\pi.$$

Näistä voidaan ratkaista x:

$$x = \pi/6 + 2k\pi/3 \quad \text{tai} \quad x = \pi/2 + 2k\pi.$$

Tulos on sama kuin edellä, vaikka juuret onkin ryhmitelty hieman eri tavoin.

Esimerkki 2 trigonometrisesta yhtälöstä

Yhtälö $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ voidaan ratkaista sijoittamalla

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

jolloin saadaan juuriyhtälö tuntemattomana $\sin x$. Tämän ratkaisu tapahtuu siirtämällä termejä yhtälössä sopivasti ja korottamalla saatu yhtälö puolittain neliöön. Seurauksena voi olla (ja onkin) että saadaan ylimääräisiä juuria, jotka eivät toteutakaan alkuperäistä yhtälöä.

■ yhtälö (juuri-)

Neliöön korotus voidaan kuitenkin tehdä yksinkertaisemminkin. Korottamalla alkuperäinen yhtälö suoraan neliöön saadaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2, \quad \text{mistä seuraa} \quad \sin 2x = 1.$$

Tällöin $2x = \pi/2 + 2k\pi$ eli $x = \pi/4 + k\pi$. Neliöön korotus on tällöinkin tuonut mukanaan ylimääräisiä juuria. Tarkistus osoittaa, että kelvollisia ovat ainoastaan arvot

$$x = \pi/4 + 2k\pi.$$

Ratkaisu voidaan myös perustaa toisenlaiseen ideaan:

Jakamalla alkuperäinen yhtälö luvulla $\sqrt{2}$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \quad \text{eli} \\ \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = 1, \end{aligned}$$

mistä sinin yhteenlaskukaavan avulla seuraa $\sin(x+\pi/4) = 1$. Tällöin $x+\pi/4 = \pi/2 + 2k\pi$, mikä antaa saman ratkaisun kuin edellä.