ESITIEDOT: ■ vektori
KATSO MYÖS: ■ determinantti

Skalaaritulo

Vektoreiden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen lisäksi vektoreiden välille voidaan määritellä myös kertolasku. Itse asiassa näitä on kaksi erilaista.

■ vektori
■ yhteenlasku (vektorien)

Seurauksena on, että vektoreilla voidaan laskea samaan tapaan kuin reaali- tai kompleksiluvuilla. Tällöin puhutaan *vektorialgebrasta*.

■ skalaarilla kertominen (vektorien)

Tason tai avaruuden kahden vektorin *skalaaritulo* eli *sisätulo* eli *pistetulo* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ määritellään asettamalla

■ kosini

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \vartheta,$$

missä ϑ on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma ($0 \leq \vartheta \leq \pi$).

■ kulma (taso-)

Vektorin skalaaritulo itsensä kanssa on sama kuin vektorin pituuden neliö, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, koska tällöin $\vartheta = 0$ ja kosini siis on $= 1$.

■ pituus (vektorin)

Jos vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuoria, on niiden välisen kulman $\pi/2$ kosini $= 0$ ja siis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Skalaaritulo voi olla $= 0$ myös sen takia, että jompikumpi (tai molemmat) vektoreista on nollavektori. Tapana on sanoa, että nollavektori on kohtisuorassa mitä tahansa vektoria vastaan, jolloin voidaan yksinkertaisesti kirjoittaa: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, jos ja vain jos $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat kohtisuorat.

■ nollavektori

Koska kosinin itseisarvo on ≤ 1, on $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

Määritelmän pohjalta voidaan geometrisilla konstruktioilla osoittaa, että skalaaritulo on vaihdannainen ja noudattaa osittelulakeja. Skalaariset kertoimet voidaan kerätä yhteen: $(\lambda \mathbf{a}) \cdot (\mu \mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Tulon liitännäisyydestä ei sen sijaan voida puhua: Koska tulon arvo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ on skalaari, ei sen skalaarituloa kolmannen vektorin kanssa voida muodostaa.

■ vaihdannaisuus
■ osittelulaki
■ liitännäisyys

Jos tason vektorit on esitetty kantavektoreiden $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ lineaariyhdistelyinä, saadaan skalaaritulolle yksinkertainen lauseke. Olkoon $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$. Näiden skalaaritulo on em. laskulakien mukaan

■ kantavektori
■ lineaariyhdistely

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_xb_x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_yb_x\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= a_xb_x + a_yb_y, \end{aligned}$$

koska vektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuoria ja pituudeltaan $= 1$, ts. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$.

Vastaava tulos on voimassa avaruuden vektoreille: Jos $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, niin

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

■ Sisältö
■ Hakemisto

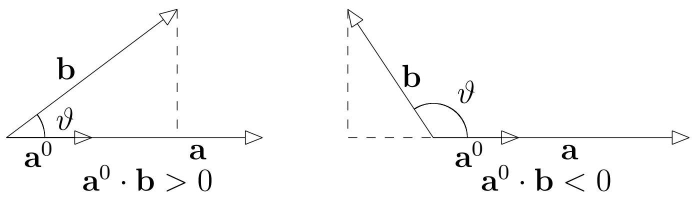
Vektorin komponentti

Vektorin $\mathbf{b}$ *skalaarikomponentti* vektorin $\mathbf{a}$ suunnalle on

■ vektori
■ kosini

$$|\mathbf{b}|\cos\vartheta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{a}^0\cdot\mathbf{b}.$$

Tämä voi myös olla negatiivinen, jos vektoreiden välinen kulma ϑ on $> \pi/2$.



Vastaavasti saadaan vektorin $\mathbf{b}$ *vektorikomponentti* vektorin $\mathbf{a}$ suunnalle liittämällä skalaarikomponenttiin suunta:

■ yksikkövektori

$$|\mathbf{b}|\cos\vartheta\;\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}^0.$$

Vektorikomponentin suunta on siis joko vektorin $\mathbf{a}$ suunta tai sille vastakkainen suunta riippuen skalaaritulon $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ merkistä, ts. siitä, onko vektori $\mathbf{b}$ pikemminkin saman- vai vastakkaissuuntainen kuin $\mathbf{a}$.

Jos vektori on esitetty lineaariyhdistelynä kantavektoreista, siis $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, on

■ lineaariyhdistely
■ kantavektori

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i} = b_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + b_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = b_x.$$

Kerroin b_x on siis vektorin $\mathbf{b}$ skalaarikomponentti kantavektorin $\mathbf{i}$ suunnalle eli x-akselille; lineaariyhdistelyn termi $b_x\mathbf{i}$ on vastaavasti vektorikomponentti. Vastaava pätee luonnollisesti muillekin kantavektoreille.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Vektoritulo

Vektoritulo eli *ristitulo* voidaan määritellä vain avaruuden vektoreille. Sitä merkitään $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ja se määritellään seuraavilla ehdoilla:

■ vektori

- Ristitulovektorin pituus on $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \vartheta$, missä ϑ on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma ($0 \leq \vartheta \leq \pi$).
- Ristitulovektorin suunta määräytyy siten, että se on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaan; kahdesta mahdollisuudesta valitaan se, joka tekee vektorikolmikosta $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ oikeakätisen (so. kyseiset kolme vektoria suhtautuvat toisiinsa kuten oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi ojennettuina).
- Jos jompikumpi vektoreista $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on nollavektori, myös niiden ristitulo on nollavektori.

■ pituus (vektorin)
■ kulma (taso-)
■ koordinaatisto (oikeakätinen)
■ nollavektori

Geometrisilla tarkasteluilla on mahdollista osoittaa, että ristitulo noudattaa osittelulakeja, so.

■ osittelulaki

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Skalaariset kertoimet voidaan myös kerätä yhteen:

$$(\lambda\mathbf{a}) \times (\mu\mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Vaihdannainen tai liitännäinen ei vektoritulo sen sijaan ole. Tekijöiden järjestystä vaihdettaessa muuttuu merkki: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Esimerkiksi on $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ ja $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{o} = \mathbf{o}$ eikä liitännäisyys siis päde.

■ vaihdannaisuus
■ liitännäisyys

Vektorin vektoritulo itsensä kanssa on nollavektori: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$. Tällöin nimittäin vektoreiden välinen kulma on $\vartheta = 0$, jolloin tulovektorin pituus on $= 0$.

Vektoritulon laskeminen

Kantavektoreiden vektoritulot ovat ■ kantavektori

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{o},\\
&\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\quad\text{ja}\\
&\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Vektoreiden $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$ vektorituloksi saadaan tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \quad a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\
&\quad + a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\
&\quad + a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Tämä voidaan kirjoittaa helpommin muistettavaan determinantin muotoon ■ determinantti

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

Kolmitulot

Kolmesta vektorista muodostettu tulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ on mielekäs vain, mikäli vektoritulo lasketaan ennen skalaarituloa: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Tuloksena on skalaari ja tuloa kutsutaankin *skalaarikolmituloksi*. Sulut on tapana jättää pois, koska lausekkeella on vain yksi mielekäs tulkinta.

■ vektori
■ skalaari

Skalaari- ja vektoritulon lausekkeiden perusteella voidaan mekaanisella laskulla osoittaa, että skalaarikolmitulossa voidaan pisteen ja ristin paikkaa vaihtaa ja toisaalta tekijävektoreita kierrättää ilman että tulon arvo muuttuu:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\
&\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Jos tekijöistä kaksi vaihdetaan keskenään, muuttuu skalaarikolmitulon merkki: esimerkiksi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. Jos kaksi (tai kolme) tekijää on samoja, tulo on $= 0$.

Skalaarikolmitulo voidaan myös laskea determinantista:

■ determinantti

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix},$$

missä $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$.

Kolmesta vektorista muodostettu kaksinkertainen vektoritulo on myös mielekäs: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ tai $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Tämän arvo on vektori ja sitä kutsutaan *vektorikolmituloksi*.

Vektorikolmitulolle on voimassa kehityskaavat

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \\
&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}.
\end{aligned}$$