■ Sisältö
■ Hakemisto

Ympyrä ja sen yhtälö

Tason pisteet, jotka ovat vakioetäisyydellä kiinteästä pisteestä, muodostavat *ympyrän* eli *ympyräviivan*. Kiinteä piste on ympyrän *keskipiste* ja vakioetäisyys sen *säde*.

■ ympyrä (ala)
■ käyrä (taso-)

Nimitystä ympyrä käytetään toisinaan myös ympyräviivan sisään jäävästä tasoalueesta. Ympyräviivaa itseään kutsutaan tällöin usein ympyrän *kehäksi*.

Analyyttisessa geometriassa ympyrää (ympyräviivaa) käsitellään sen yhtälön avulla. Pythagoraan lauseen perusteella ympyrän pisteet (x, y) toteuttavat yhtälön

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

missä (a, b) on ympyrän keskipiste ja R sen säde. Suorittamalla neliöönkorotukset yhtälö saadaan muotoon $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. Kyseessä on siten eräs toisen asteen käyrä.

■ geometria (analyyttinen)
■ Pythagoraan lause
■ koordinaatisto (xy-)
■ etäisyys (pisteiden)
■ käyrä (toisen asteen)

Jos kääntäen on annettuna toisen asteen käyrän yhtälö, jossa neliötermien x^2 ja y^2 kertoimet ovat yhtä suuret eikä tulotermiä (xy-termiä) esiinny, voidaan neliöiksi täydentämällä tutkia, esittääkö tämä ympyrää. Menettely on seuraavan esimerkin mukainen:

Olkoon tarkasteltavana yhtälö $2x^2 + 2y^2 - x + 4y + c = 0$, missä c on jokin vakio. Tämä voidaan aluksi saattaa muotoon

$$2(x^2 - x/2) + 2(y^2 + 2y) + c = 0.$$

Jotta sulkulausekkeet voitaisiin tulkita binomin neliöiksi binomikaavan mukaisesti, on niihin lisättävä sopivat neliötermit; jotta yhtälö säilyisi voimassa, on nämä termit toisaalla vähennettävä pois:

■ binomi
■ binomikaava
■ binomikaava

$$\begin{aligned}
&2(x^2 - x/2 + 1/16) + 2(y^2 + 2y + 1) + c - 1/8 - 2 = 0 \quad \text{eli} \\
&2(x - 1/4)^2 + 2(y+1)^2 = 17/8 - c \quad \text{eli} \\
&(x - 1/4)^2 + (y+1)^2 = 17/16 - c/2.
\end{aligned}$$

Jos lauseke $17/16 - c/2$ on positiivinen, se voidaan tulkita ympyrän säteen neliöksi ja kyseessä todella on ympyrä. Esimerkiksi arvolla $c = -1$ saadaan säteeksi $R = 5/4$ ja ympyrän keskipiste on $(1/4, -1)$. Jos lauseke on $= 0$, kyseessä on piste; arvolla $c = 17/8$ yhtälö esittää siten pistettä $(1/4, -1)$. Jos lauseke on negatiivinen, ei yhtälö voi toteutua millään arvoilla (x, y) eikä se siis esitä mitään käyrää.

■ Sisältö
■ Hakemisto

Ympyrän parametriesitys

■ parametriesitys (tasokäyrän)
■ sini
■ kosini

Ympyrän yhtälö voidaan esittää parametrimuodossa trigonometristen funktioiden $\sin$ ja $\cos$ avulla. Ympyrän $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ parametriesitys on tällöin

$$x = a + R\cos t, \quad y = b + R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sijoittamalla voidaan nähdä, että alkuperäinen yhtälö tällöin todellakin toteutuu: $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$.

Parametrin t saadessa arvot sinin ja kosinin jakson alueelta kiertää piste (x, y) ympyrän yhden kerran. Siten alueen $t \in [0, 2\pi]$ sijasta voidaan yhtä hyvin käyttää vaikkapa aluetta $t \in [-\pi, \pi]$.

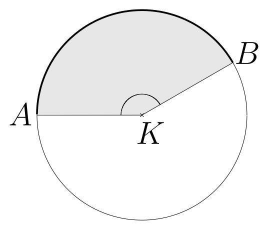
■ Sisältö
■ Hakemisto

Sektori ja segmentti

Olkoot A ja B kaksi ympyrällä (ympyrän kehällä) olevaa pistettä. Nämä jakavat ympyrän kahteen *kaareen*; ellei toisin mainita, kaarella AB tarkoitetaan näistä pienempää.

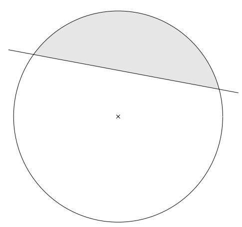
Kun kaaren päätepisteet A ja B yhdistetään ympyrän keskipisteeseen K, muodostuu kaarta vastaava *keskuskulma* AKB. Kaaren AB suuruutta mitataan sen keskuskulman suuruuden avulla yksikkönä aste, radiaani, tms. Kaaren AB ja säteiden KA ja KB rajaama tasoalue on ympyrän *sektori*.

■ kulma (taso-)
■ sektori (ala)



Ympyrän sekantti, so. suora, joka leikkaa ympyrää kahdessa pisteessä, jakaa ympyräalueen kahteen osaan. Näitä kutsutaan ympyrän *segmenteiksi*. Ellei toisin mainita, tarkoitetaan kahdesta mahdollisesta pienempää. Sekantista ympyrän sisään jäävä osa on ympyrän *jänne*. Jos sekantti erityisesti kulkee ympyrän keskipisteen kautta, jännettä sanotaan ympyrän *halkaisijaksi*.

■ sekantti (suora)
■ segmentti (ala)

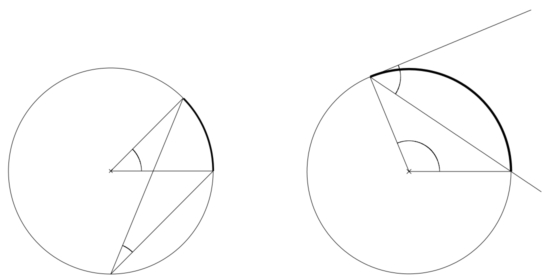


■ Sisältö
■ Hakemisto

Kehäkulma

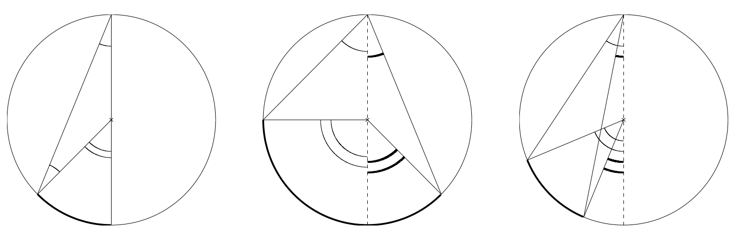
Ympyrän *kehäkulma* on kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja kylkinä on kaksi jännettä (sekanttia) tai jänne ja tangentti. Kehäkulman aukeamaan jäävä osa ympyrän kehää on kehäkulmaa vastaava kaari. Tätä kaarta vastaavaa keskuskulmaa kutsutaan myös kehäkulmaa vastaavaksi keskuskulmaksi.

■ kulma (taso-)
■ kehäkulma (esimerkki)
■ kehäkulma (esimerkki)
■ sekantti (suora)
■ tangentti (suora)



Kehäkulman suuruus on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Tämä voidaan päätellä piirtämällä ympyrään kummankin kulman kärkipisteen kautta kulkeva halkaisija alla olevien kuvioiden osoittamalla tavalla. Vasemmanpuolinen kuvio on perustapaus, jossa tulos seuraa siitä, että kolmion kulmien summa on $180°$ ja toisaalta vieruskulmien summa on myös $180°$. Yleinen tapaus saadaan jakamalla tutkittavat kulmat halkaisijaan rajoittuvien kulmien summiksi tai erotuksiksi kahden jälkimmäisen kuvion osoittamalla tavalla. Tulos on voimassa myös, jos kehäkulman toisena kylkenä on ympyrän tangentti.

■ kolmio
■ kulma (vierus-)



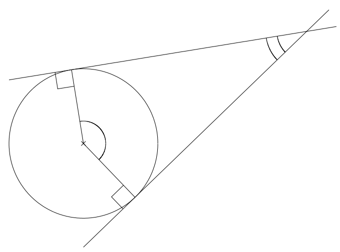
Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria riippumatta kulman kärjen sijainnista ympyrän kehällä. Tämä on seuraus edellisestä: jokainen tällainen kehäkulma on suuruudeltaan puolet vastaavasta kaaresta (ts. keskuskulmasta).

Tangenttikulma

Ympyrän *tangenttikulma* on kulma, jonka kyljet ovat ympyrän tangentteja ja kärkipiste siis ympyrän ulkopuolella. Tangenttikulmaa vastaava keskuskulma saadaan yhdistämällä tangenttien sivuamispisteet ympyrän keskipisteeseen.

■ kulma (taso-)
■ tangentti (suora)
■ kulma (suplementti-)

Tangenttikulma ja vastaava keskuskulma ovat suplementtikulmia, ts. niiden summa on $180°$.



Pisteet, joissa tangenttikulman kyljet sivuavat ympyrää, löydetään piirtämällä ympyrä, jonka halkaisijana tangenttikulman kärjen ja ympyrän keskipisteen yhdysjana. Perusteena on, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. (Konstruoitaessa geometrisia kuvioita harpilla ja viivoittimella voidaan suora piirtää, jos kaksi sillä olevaa pistettä tunnetaan; tangentin piirtäminen suoraan ympyrää sivuamaan ei siis ole sallittua eikä käytännössä kovin tarkkaakaan. Tämän johdosta on sivuamispiste ensin konstruoitava.)

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kulma, ■ piste, ■ suora
KATSO MYÖS: ■ toisen asteen käyrät

Pisteen potenssi

Olkoon P annetun ympyrän ulkopuolinen piste. Asetetaan pisteen P kautta ympyrän sekantti, joka leikkaa ympyrää pisteissä A ja B. Pisteestä P asetettu ympyrän tangentti sivutkoon ympyrää pisteessä C.

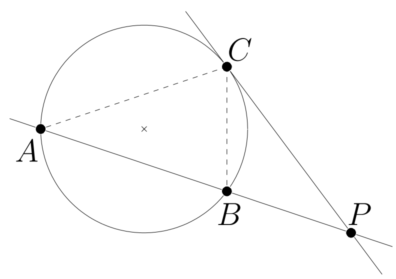
■ sekantti (suora)
■ tangentti (suora)

Pisteen P potenssiksi ympyrän suhteen sanotaan janojen pituuksien tuloa $|PA||PB|$, mikä on riippumaton sekantin asemasta ja yhtä suuri kuin tangentilla olevan janan pituuden neliö $|PC|^2$.

Todistus ilmenee seuraavasta kuviosta, missä kolmiot PAC ja PCB ovat yhdenmuotoisia, koska niillä on yhteinen kulma pisteessä P ja toisaalta kulmat PAC ja PCB ovat yhtä suuria samaa kaarta BC vastaavina kehäkulmina. Kolmioiden sivujen verrannollisuudesta seuraa

■ yhdenmuotoisuus (kolmioiden)

$$\frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|PC|}{|PA|} \quad \text{eli} \quad |PA||PB| = |PC|^2.$$



Jos piste P sijaitsee ympyrän sisällä, pätee vastaava. Jos pisteen kautta asetetaan sekantti, joka leikkaa ympyrää pisteissä A ja B, on tulo $|PA||PB|$ riippumaton sekantin asemasta. Tätä kutsutaan ympyrän sisäpuolella olevan pisteen P potenssiksi ympyrän suhteen.

Tulos todistetaan jälleen yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Jos AB ja CD ovat pisteen P kautta kulkevia ympyrän jänteitä, ovat kolmiot APD ja CPB yhdenmuotoisia ja

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|} \quad \text{eli} \quad |PA||PB| = |PC||PD|.$$

Tulo on siis riippumaton siitä, mikä pisteen P kautta kulkeva sekantti on kyseessä.