Simo K. Kivelä, 7.12.2004

Polynomien sieventäminen

Seuraava tehtävä on syksyn 2000 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta.

> Osoita, että $x\,y + y\,z + z\,x = -1/2$, kun $x + y + z = 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ratkaisu

Ratkaisu laskentaohjelmalla on hämmentävän yksinkertainen:

```
In[1]:= Simplify[x y + y z + z x, {x + y + z == 0, x^2 + y^2 + z^2 == 1}]
```

Out[1]= $-\frac{1}{2}$

Vaihtoehtoinen ratkaisu

Paremman kuvan ongelman luonteesta saa tekemällä ratkaisun vaiheittain, jolloin myös selviää yleinen periaate. (`Simplify`-käsky ei kuitenkaan käytä tämänkaltaisia menettelyjä, vaan huomattavsti pidemmälle kehitettyjä ja yleispätevämpiä.)

Määritellään kohdeyhtälö ja voimassaolevat ehdot:

```
In[2]:= kohde = x y + y z + z x == -1 / 2
```

Out[2]= $x\,y + x\,z + y\,z == -\frac{1}{2}$

```
In[3]:= ehto1 = x + y + z == 0
```

Out[3]= $x + y + z == 0$

```
In[4]:= ehto2 = x^2 + y^2 + z^2 == 1
```

Out[4]= $x^2 + y^2 + z^2 == 1$

Eliminoidaan yksi muuttujista jonkin ehtoyhtälön avulla:

```
In[5]:= sij1 = Solve[ehto1, x]
```

Out[5]= $\{\{x \to -y - z\}\}$

In[6]:=
```
{uusikohde, uusiehto2} = {kohde, ehto2} /. First[sij1] // ExpandAll
```

Out[6]= $\left\{-y^2 - y\,z - z^2 == -\frac{1}{2},\; 2\,y^2 + 2\,y\,z + 2\,z^2 == 1\right\}$

Vastaavalla tavalla eliminoidaan tämän jälkeen toinenkin muuttujista:

In[7]:=
```
sij2 = Solve[uusiehto2, y]
```

Out[7]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{2}\left(-z - \sqrt{2 - 3\,z^2}\right)\right\},\; \left\{y \to \frac{1}{2}\left(-z + \sqrt{2 - 3\,z^2}\right)\right\}\right\}$

In[8]:=
```
uusikohde /. sij2 // ExpandAll
```

Out[8]= {True, True}

Uusi kohdeyhtälö siis toteutuu, sijoitetaanpa siihen kumpi tahansa saaduista muuttujan y lausekkeista.

Harjoitustehtäviä

1) Voisiko edellä olevassa vaihtoehtoisessa ratkaisussa eliminoinnin tehdä lyhyemmin?

2) Sievennä lauseke $x^2 + y^2 + z^2$, kun $x + y + z = 0$ ja $x\,y + y\,z + z\,x = -1/2$.

3) Sievennä lauseke $x + y + z$, kun $x\,y + y\,z + z\,x = -1/2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4) Sievennä lauseke $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, kun $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, ..., $x_{n-1} + x_n = 0$, $x_n + x_1 = 0$. Tarkastele aluksi arvoja $n = 3$ ja $n = 4$. Yleistä tulos tämän jälkeen.