Simo K. Kivelä

Mathematica-harjoitustehtäviä

Versio 1.14 (20.08.2010)

Aritmetiikka

1. Strategiapelissä rakennetaan uudelle planeetalle makean veden säiliötä. Säiliö on ympyräpohjainen lieriö, jonka korkeus on 320 metriä ja pohjan säde 1000 metriä. Säiliöstä haihtuu vettä keskimäärin 100 litraa minuutissa. Kuinka monta planeetan vuotta säiliössä riittäisi vettä, ennen kuin täysi säiliö pelkästään haihtumisen vuoksi olisi tyhjentynyt? Planeetan vuosi on $3 \cdot 10^7$ sekuntia.

Vihje: Kertomerkki on joko välilyönti tai *; numeroiden tapauksessa * on selkeämpi (ihmiselle).

2. Trooppisen vuoden pituus on 365 vrk 5 h 48 min 45 s ja Maan pyörähdysaika akselin ympäri 23 h 56 min 4 s. Ilmoita murtolukuna, kuinka monta pyörähdystä Maa tekee trooppisessa vuodessa. Mikä tulos on desimaalilukuna?

Vihje: Kertomerkki on joko välilyönti tai *; numeroiden tapauksessa * on selkeämpi (ihmiselle).

3. Sievennä lauseke $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Laske myös likiarvo 100 desimaalilla.

Vihje: Kokeile funktioita `Simplify` ja `FullSimplify`. Neliöjuurifunktio on `Sqrt`; symboli löytyy myös paletista. Likiarvon laskeminen: `N`.

4. Laske summat $\sum_{k=1}^{n} k^2$, kun $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Jaa tulokset tekijöihin. Ovatko jotkin summat jaottomia, so. alkutekijöitä?

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Sum`, `FactorInteger`, `PrimeQ`. Taulukoita voi tehdä funktiolla `Table`. Liittämällä loppuun määre `//TableForm` taulukko saadaan tulostetuksi havainnollisempaan muotoon.

5. Tutki, millaisia tarkkoja arvoja saadaan lausekkeelle $\sin(\pi/n)$, kun n on luonnollinen luku. Mitä tarkoittaa, että osa tuloksista on (ainakin näennäisesti) kompleksilukuja? Missä tapauksissa tulos ei sisällä imaginaariyksikköä?

Vihje: Tarvittava funktio on `FunctionExpand`. Muista iso alkukirjain ja hakasulut: `Sin[Pi/n]`.

6. Laadi taulukko sini- ja kosinifunktioiden arvoista välillä $0° - 90°$ yhden asteen välein.

Vihje: Taulukoita voi tehdä funktiolla `Table`. Liittämällä loppuun määre `//TableForm` taulukko saadaan tulostetuksi havainnollisempaan muotoon. Trigonometristen funktioiden argumenttien tulee olla radiaaneissa. Luku π kirjoitetaan `Pi`; se voidaan myös valita paletista. Muista iso alkukirjain ja hakasulut: `Sin[Pi/4]`, `Cos[0]`. Katso dokumentaatiosta: `Degree`.

7. Lukua π approksimoidaan luvulla $\sqrt{10}$. Laske absoluuttinen virhe ja suhteellinen virhe prosenteissa.

Vihje: Luku π on `Pi` ja $\sqrt{10}$ ilmaistaan `Sqrt[10]`. Molemmissa tapauksissa voidaan symbolit valita myös paletista.

8. *Stirlingin kaavan* mukaan on

$$\ln n! \approx (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Approksimointi on sitä tarkempi, mitä suurempi n on. Laske absoluuttinen ja suhteellinen approksimaatiovirhe, kun $n = 10,\ 100,\ 1000.$

Vihje: Muodosta lausekkeet absoluuttiselle ja suhteelliselle virheelle n:n funktiona ja sijoita näihin tarvittavat n:n arvot korvaussääntöä käyttäen.

9. Laske lausekkeen $(1 + \frac{1}{n})^n$ likiarvo yhä isommilla arvoilla n ja tutki, miten tämä lähestyy Neperin lukua e.

Vihje: Likiarvot halutulla tarkkuudella saadaan funktiolla `N`. Neperin luku on `E`; se voidaan valita myös paletista, jolloin symboli näyttää hieman erikoiselta pikku e:ltä. Aloita varovaisesti; älä syötä kovin suuria lukuja n. Tulokset voi kerätä taulukoksi `Table`-funktiolla.

10. Laske summan $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$ likiarvo yhä isommilla arvoilla n ja tutki, miten summan käänteisarvo lähestyy Neperin lukua e.

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Sum`, `N`. Neperin luku on `E`; se voidaan valita myös paletista, jolloin symboli näyttää hieman erikoiselta pikku e:ltä. Kertoma ilmaistaan yksinkertaisesti huutomerkillä. Tulokset voi kerätä taulukoksi `Table`-funktiolla.

11. Kahden paikkakunnan välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna voidaan laskea kaavasta

$$d = R \arccos(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

missä ϑ_1 ja φ_1 tarkoittavat ensimmäisen, ϑ_2 ja φ_2 vastaavasti toisen paikan leveys- ja pituusatetta. $R = 6370$ km on maapallon säde. Muodosta funktio, jolla voidaan laskea kahden paikkakunnan etäisyys antamalla argumenteiksi paikkojen koordinaatit. Laske a) Helsingin ja Tokion, b) Reykjavikin ja Sydneyn välinen etäisyys, kun paikkakuntien koordinaatit ovat seuraavat:

	leveys		pituus	
Helsinki	60° 08'	N	25° 00'	E
Tokio	35° 40'	N	139° 45'	E
Reykjavik	64° 09'	N	21° 58'	W
Sydney	33° 55'	S	151° 10'	E

Vihje: Muodosta funktio siten, että argumentit annetaan asteissa. Arkuskosini on `ArcCos`. Aste on `Degree`; katso tarkemmat tiedot dokumentaatiosta.

Lausekkeiden käsittely

12. Sievennä lauseke $\dfrac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$.

Vihje: Sopivia Mathematican funktioita ovat `Simplify` ja `FullSimplify`.

13. Talleta lauseke $(a + b)^{10}$ jollekin nimelle ja kehitä se. Jaa tulos tekijöihin, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

Vihje: Tarvittavat Mathematican funktiot ovat `Expand` ja `Factor`. Näiden argumenttina oleva lauseke voi olla joko hakasuluissa tai komento voidaan kirjoittaa sen perään: `Expand[`*`lauseke`*`]` tai *`lauseke`*`//Expand`.

14. Jaa tekijöihin kahden muuttujan polynomi

$$x^5 + 2x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 - x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 + 2y^4.$$

Kehitä saamasi tulos, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

Vihje: Tarvittavat Mathematican funktiot ovat `Expand` ja `Factor`.

15. Tutki, mikä lauseke on tekijänä lausekkeessa $a^n - b^n$ riippumatta eksponentin $n \in \mathbb{N}$ arvosta. Missä tapauksessa lausekkeella $a^n + b^n$ on vastaavanlainen tekijä? Supista lausekkeet

$$\frac{a^{15} - b^{15}}{a^7 - b^7} \quad \text{ja} \quad \frac{a^{15} + b^{15}}{a^7 + b^7}\ .$$

Mitä säännönmukaisuutta tuloksen osoittajassa ja nimittäjässä on?

Vihje: Tekijöihin jako: `Factor`. Supistaminen: `Cancel`. Kokeile luvulle n erikseen eri arvoja. (Miksi yleistä symbolia n ei voida käyttää?) Kokeilut voidaan laskea myös yhteen taulukkoon käyttämällä komentoa `Table`; tulostuksen saa hieman selkeämpään muotoon kirjoittamalla komennon jälkeen `//TableForm`.

16. Lavenna murtolauseke

$$\frac{a + x}{\sqrt{a + x} - \sqrt{x}}$$

siten, että juuria ei esiinny nimittäjässä.

Vihje: Murtolausekkeesta voi poimia osoittajan funktiolla `Numerator` ja nimittäjän lausekkeella `Denominator`. Kokeile myös, mitä tapahtuu, kun murtolausekkeeseen kohdistetaan peräkkäin funktiot `Apart` ja `Simplify`. Mitä nämä periaatteessa tekevät?

17. Hajota seuraavat rationaalilausekkeet osamurtokehitelmiksi, joissa nimittäjät ovat ensimmäistä astetta tai ensimmäisen asteen polynomin potensseja:

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6}, \qquad \frac{2x + 7}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Miten päästään takaisin alkuperäiseen lausekkeeseen?

Vihje: Sopivia funktioita: `Apart`, `Together`, `Simplify`, `Expand` ...

18. Muodosta osamurtokehitelmä lausekkeelle

$$\frac{4696 - 11076x + 11290x^2 - 6227x^3 + 1687x^4 + 180x^5 - 364x^6 + 156x^7 - 36x^8 + 4x^9}{-1152 + 2496x - 2528x^2 + 1616x^3 - 704x^4 + 208x^5 - 40x^6 + 4x^7}.$$

Lisää tämän jälkeen lausekkeen nimittäjään 1 ja muodosta osamurtokehitelmä uudelleen. Miksi toisessa tapauksessa onnistutaan, toisessa ei?

Vihje: Sopivia funktioita: `Apart`, `Numerator`, `Denominator`. Myös hiirtä ja paletteja voi hyödyntää.

19. Tutki, tarkoittaako Mathematican merkintä `x^x^x` samaa kuin `(x^x)^x` vai samaa kuin `x^(x^x)`. Sievennä, derivoi ja integroi kumpikin vaihtoehto.

Vihje: Yksinkertainen sievennyskomento `Simplify` ei auta, koska Mathematica varautuu mahdollisuuteen, että muuttujat ovat kompleksisia, jolloin tavanomaiset laskusäännöt eivät rajoituksitta olekaan voimassa. Kokeile tämän johdosta seuraavia sievennyskäskyjä: `Simplify[..., x>0]` ja `PowerExpand`. Katso näiden komentojen tarkempaa selitystä Mathematican dokumentaatiosta.

20. Talleta lauseke $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ jollekin nimelle ja laske sen arvo, kun a) $x = 2$, $y = 3$, b) $x = -5$, $y = \pi$. Laske sekä tarkka arvo, että 50-desimaalinen likiarvo. Ovatko desimaaliesitykset jaksollisia?

Vihje: Käytä arvojen sijoittamisessa korvausoperaattoria `/.` (eli `ReplaceAll`). Likiarvojen laskeminen funktiolla `N`.

21. Mathematicassa on kaksi operaattoria, joilla muuttujalle annetaan arvo: joko `=` (eli `Set`) tai `:=` (eli `SetDelayed`). Yritä selvittää näiden ero antamalla syötteet

```
a=RandomInteger[{1,100}]
Table[a,{10}]
b:=RandomInteger[{1,100}]
Table[b,{10}]
```

Vihje: Delay = viivästää. Katso myös Mathematican dokumentaatiota. Funktio `RandomInteger` generoi satunnaisia kokonaislukuja; sen argumenttina annetaan väli, jolta luvut otetaan.

22. Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat $72^\circ\,50'$ suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon.

Vihje: Trigonometristen funktioiden argumentit ilmoitetaan Mathematicassa radiaaneissa. Radiaanien ja asteiden välinen muunnoskerroin on valmiina nimellä `Degree` (katso dokumentaatiota), mutta kertoimen voi tietenkin muodostaa itsekin. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, argumentit annetaan hakasuluissa.

23. Tutki lausekkeiden

a) $\sqrt{(x-2)^2}$

b) $\sin(5x)$

c) $\sin(x+y)$

d) $\exp(ix) + \exp(-ix)$

e) $\cos(\arccos x)$

f) $\arccos(\cos x)$

g) $\exp(\ln x)$

h) $\ln(\exp x)$

sieventämistä. Mitä näistä pitäisi tulla? Mitä Mathematica antaa ja millä komennolla? Mitä symbolisen ohjelman itse asiassa pitäisi antaa vastaukseksi, kun muuttujaa x ei ole millään tavoin rajoitettu?

Vihje: Mathematicalla on useita erilaisia `Expand`- ja `Simplify`-tyyppisiä komentoja. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, joskus isoja kirjaimia voi olla muuallakin: `ArcCos`. Argumentit annetaan hakasuluissa. Imaginaariyksikkö on `I`.

24. Muokkaa muotoa $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $\sin^n x$, $\cos^n x$ olevia trigonometrisia lausekkeita erilaisiin muotoihin, kun n on jokin luonnollinen luku (ei symboli).

Vihje: Käytä funktioita `TrigFactor`, `TrigExpand`, `TrigReduce`, `ExpToTrig`, `TrigToExp`. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, argumentit annetaan hakasuluissa.

25. Sievennä Tšebyševin polynomin lauseke $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{N}$, muotoon, josta ilmenee, millainen polynomi on kyseessä. Mikä on polynomin asteluku?

Vihje: Anna symbolille n numeerisia arvoja. Funktioiden nimet ovat `Cos` ja `ArcCos`.

26. Astetta n olevan polynomin nollakohdat olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Määritä polynomien kertoimien lausekkeet nollakohtien funktioina tapauksissa $n = 2, 3, 4, 5$. Miten polynomin kertoimet riippuvat nollakohdista?

Vihje: Polynomi voidaan nollakohtien avulla kirjoittaa tulomuotoon

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Hyödyllisiä funktioita ovat mm. `Product`, `Collect`, `Coefficient`, `CoefficientList`. Jos listassa on pitkiä alkioita, sen voi tulostaa selkeämpään muotoon kirjoittamalla perään `//TableForm`.

27. Yhtälöt

$$x = \cos u(a + b\cos v),\ \ y = \sin u(a + b\cos v),\ \ z = b\sin v$$

esittävät erästä pintaa, *ymyrärengasta* eli *torusta* parametrimuodossa. Etsi torukselle muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö eliminoimalla eo. yhtälöistä parametrit u ja v.

Vihje: Eliminointi voidaan tehdä funktiolla `Eliminate`; ks. käyttöohjeet Mathematican dokumentaatiosta. Se toimii kuitenkin parhaiten polynomeihin sovellettuna ja trigonometristen funktioiden tapauksessa ei kovin yksinkertaisiin lausekkeisiin päästä. Vaikeudet voidaan välttää seuraavasti: Eliminoitaviksi muuttujiksi otetaan parametrien u ja v sijasta niiden sinit ja kosinit, ts. tehdään eo. yhtälöihin sijoitus `Sin[u]->u1, Cos[u]->u2, Sin[v]->v1, Cos[v]->v2`. Uusien muuttujien välillä ovat voimassa yhtälöt `u1^2 + u2^2 == 1` ja `v1^2 + v2^2 == 1`, jolloin on kaikkiaan viisi yhtälöä, joista on eliminoitava neljä muuttujaa.

28. Yhtälö

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - 10x^2 - 10y^2 + 6z^2 + 9 = 0$$

esittää erästä kolmiulotteisen avaruuden pintaa, *ymyrärengasta* eli *torusta*. Jos pintaa leikataan tasolla $z = 0$ tai tasolla $x = 0$, saadaan leikkauskäyräksi kaksi ympyrää. Määritä näiden yhtälöt.

Vihje: Muodosta leikkauskäyrien yhtälöt sijoittamalla vuorollaan arvot $x = 0$ ja $z = 0$ annettuun yhtälöön. Jaa yhtälön vasen puoli tekijöihin! (Mahdollista tarvetta varten: Jos yhtälön nimenä on `yht`, niin `yht[[1]]` on sen vasen ja `yht[[2]]` oikea puoli.)

Yhtälöt

29. Ratkaise yhtälöiden

a) $168x = 195$

b) $x^2 - 2x - 4 = 0$

c) $x^3 - x^2 + x - 21 = 0$

d) $(a - b)x^2 + ax + b = 0$

kaikki juuret. Sijoita juuret takaisin yhtälöihin ja tutki, toteutuvatko yhtälöt.

Vihje: Talleta ensin yhtälö jollekin nimelle. Yhtälöissä käytetään yhtäläisyysmerkkinä `==`. Yhtälön ratkaiseminen `Solve`-funktiolla tuottaa ratkaisut ns. korvaussääntöjen muodossa. Näiden avulla voidaan saadut juuret helposti sijoittaa mihin tahansa lausekkeeseen, esimerkiksi yhtälöön: *`yhtalo/.korvaus`*. Tässä `/.` on lyhennemerkintä Mathematican funktiolle `ReplaceAll`.

30. Etsi yhtälön $x^3 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Etsi sekä tarkat arvot että likiarvot ja sijoita kummatkin takaisin yhtälöön. Toteutuuko yhtälö?

Vihje: Likiarvot voidaan laskea joko tarkkojen arvojen likiarvoina funktiolla `N` tai suoraan käyttämällä funktiota `NSolve`. Juurten sijoittaminen yhtälöön: `yhtalo/.korvaus`, missä `/.` on lyhennemerkintä Mathematican funktiolle `ReplaceAll`.

31. Etsi yhtälön $x^7 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Sijoita jonkin juuren kaksi-, kolmi- ja nelidesimaaliset likiarvot alkuperäiseen yhtälöön ja tutki, millä tarkkuudella se toteutuu. Onko juurille mahdollista löytää tarkat arvot? Kuinka monta reaalista juurta yhtälöllä on? Voidaanko yhtälön toteutumisen tarkkuudesta päätellä juuren likiarvon tarkkuus?

Vihje: Mathematican versiosta riippuen juurten tarkat arvot saatetaan esittää hieman erikoisessa muodossa `Root`-funktion avulla. Tämä itse asiassa ilmoittaa vain, että kyseessä on juuri tämän polynomin juuri!

32. Muodosta toisen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat ratkaisemalla yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$. Laske $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, missä x_1 ja x_2 ovat saadut juuret. Tarkastele esimerkkinä yhtälöä $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

Vihje: Suorita laskut siten, että et joudu käsin syöttämään uudelleen jo laskettuja tuloksia. Käytä korvausoperaattoria `ReplaceAll` eli `/.` sopivalla tavalla. Esimerkkiyhtälön juuret ovat kompleksilukuja, mutta juurista muodostettu lauseke on yksinkertainen reaalinen murtoluku.

33. Johda `Solve`-funktiota käyttäen toisen ja kolmannen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat. Ratkaise näiden avulla yhtälöt $15x^2 + 2x + 12 = 0$ ja $x^3 - 2x - 5 = 0$ sijoittamalla kertoimien arvot ratkaisukaavaan. Syntyykö toisen asteen tapauksessa tutut ratkaisukaavat? Antaako kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan samat juuret kuin yhtälön ratkaiseminen suoraan?

Vihje: Yleiset ratkaisukaavat saadaan ratkaisemalla `Solve`-funktiolla yhtälöt, joissa kertoimet ovat symboleja.

34. Ratkaise yhtälö $x^3 + 1 = 0$ sijoittamalla kertoimien arvot kolmannen asteen yhtälön yleiseen ratkaisukaavaan. Antaako kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan samat juuret kuin yhtälön ratkaiseminen suoraan?

Vihje: Kolmannen asteen yhtälön yleinen ratkaisukaava on sangen mutkikas eikä kaikissa tapauksissa anna ongelmitta oikeaa ratkaisua. Ratkaistaessa yhtälö suoraan saatetaan tarvita funktiota `ComplexExpand` saatujen juurten sieventämiseen.

35. Etsi yhtälön $x^4-2x^3+2x^2-6x-3=0$ juuret. Jaa yhtälön vasempana puolena oleva polynomi näiden avulla mahdollisimman alhaista astetta oleviin reaalisiin tekijöihin. Onko tulos sama kuin `Factor`-funktion antama?

Vihje: `Solve`-funktion antamasta korvauslistasta voidaan poimia k:s korvaussääntö joko hiiren avulla tai asettamalla listan nimen perään indeksi kaksinkertaisiin hakasulkuihin, esimerkiksi `ratk[[k]]`. Tulos voidaan saada myös `Factor`-funktiolla, mutta siinä tarvitaan lisäoptio; ks. Mathematican dokumentaatiota.

36. Ratkaise yhtälö $z^7+1=0$. Esitä juuret muodossa $z=x+iy$ ja tutki, miten kaukana origosta juuret sijaitsevat kompleksitasossa. Mitkä ovat juurten napakulmat?

Vihje: Sievennä juurten lausekkeet `ComplexExpand`-funktiolla. Kompleksiluvun itseisarvo saadaan funktiolla `Abs`, napakulmaan voidaan käyttää funktiota `Arg` (vaikka tulos kyllä näkyy muutenkin).

37. Ratkaise kompleksinen yhtälö $z^3 - iz^2 + 2iz + (8-4i) = 0$.

Vihje: Imaginaariyksikkö on `I`. Se voidaan myös valita paletista, jolloin symboli on hieman erinäköinen.

38. Tutki eri tapoja ratkaista itseisarvoyhtälö $|x-1| + |x-3| = 3$ Mathematicalla.

Vihje: Itseisarvofunktio on `Abs`. Yhtälöön voidaan suoraan soveltaa yhtälöiden ratkaisemisessa käytettäviä komentoja itseisarvolausekkeita ensin purkamatta. Piirrä myös kuvio (`Plot`).

39. Ratkaise yhtälö $|3x+1| + |2x-3| = ax + |5x-7|$ käyttäen funktiota `Solve`; a on jokin reaalinen vakio. Kokeile, toteuttavatko saadut juuret yhtälön.

Vihje: Voi olla hyödyksi tutkia yhtälön toteutumista antamalla a:lle sopivia arvoja. Itseisarvofunktio on `Abs`.

40. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 4x + 5y = 2. \end{cases}$$

Vihje: `Solve`-funktion ensimmäisenä argumenttina voi olla usean yhtälön muodostama lista ja toisena usean tuntemattoman muodostama lista.

41. Ratkaise yhtälöryhmät

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 10z = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{cases}$

Montako ratkaisua yhtälöryhmillä on?

Vihje: Ryhmän rakennetta voi myös tutkia tarkemmin eliminoimalla esimerkiksi tuntemattoman x kahdesta ensimmäisestä ja vastaavasti kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä. Tällöin on apua Mathematican funktiosta `Eliminate`.

42. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - xy = 10 \\ ax - y = 5 \end{cases}.$$

Millä vakion a arvoilla yhtälöparilla on reaalisia ratkaisuja?

Vihje: Ratkaise ensin yhtälöpari ja poimi hiirellä ratkaisusta ehto luvulle a. Epäyhtälöitä voidaan ratkaista funktiolla `Reduce`.

43. Ratkaise käyrien

$$\begin{aligned} &16x^2 + 9y^2 + 24xy - 170x + 310y - 465 = 0 \quad \text{ja} \\ &5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0. \end{aligned}$$

leikkauspisteiden koordinaatit. Vertaa tulosta käyrien kuvaajiin.

Vihje: Kumpi on järkevämpää: Hakea leikkauspisteiden koordinaateille tarkat arvot vai likiarvot? Kuvaajat voidaan piirtää funktiolla `ContourPlot`.

44. Ratkaise yhtälö $\ln(x^2 + 1) = \sqrt{x + 1}$.

Vihje: Piirrä kuvio (`Plot`) ja selvitä sen avulla yhtälön juurten lukumäärä. Voidaanko juurille löytää tarkat arvot? Mitä yhtälönratkaisufunktioista `Solve`, `NSolve`, `FindRoot` voidaan käyttää? Miksi? Luonnollinen logaritmi on `Log`.

45. Ratkaise yhtälö $e^{-x} - \sin x = 0$. Piirrä tätä varten funktioiden $y = e^{-x}$ ja $y = \sin x$ kuvaajat samaan kuvioon. Määritä kolmen pienimmän juuren likiarvot. Montako juurta yhtälöllä on? Mitä voidaan sanoa näiden ratkaisemisesta a) algebrallisesti, b) numeerisesti?

Vihje: Funktiota `Solve` tai edes `NSolve` ei voida käyttää, koska kyseessä on transkendenttiyhtälö. Iteratiiviseen numeeriseen ratkaisemiseen (Newtonin menetelmän tapaan) on käytettävissä funktio `FindRoot`.

46. Etsi yhtälöparin $e^x + \sin y = 0$, $x^6 - xy + y^6 = 4$ juuret numeerisesti.

Vihje: Funktioita `Solve` ja `NSolve` ei voida käyttää, koska ne ratkaisevat vain algebrallisia yhtälöitä. Transkendenttinen yhtälö tai yhtälöryhmä voidaan ratkaista funktiolla `FindRoot`, joka oleellisesti käyttää yksi- tai useampiulotteista Newtonin menetelmää. Sopivien alkuarvojen löytämiseksi käyrät on syytä piirtää. Tällöin voidaan käyttää funktiota `ContourPlot`.

47. Osa tien kaarteesta on ympyrän kaari, joka kartalla kulkee xy-koordinaatiston pisteiden $(28, 98)$, $(70, 112)$ ja $(126, 84)$ kautta. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde, kun yksikkö kartalla vastaa 25:tä metriä luonnossa?

Vihje: Ratkaise kolmen algebrallisen yhtälön ryhmä. Muodosta tätä varten ensin ympyrän yhtälö, jossa säde ja keskipisteen koordinaatit ovat tuntemattomia, ja sijoita siihen annetut arvot.

48. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ leikkauspisteet, laske niiden etäisyydet origosta ja niiden keskinäinen etäisyys.

Vihje: Käytä `Solve`-komennon tuottamia korvaussääntöjä mahdollisimman tehokkaasti. Etäisyydet voi ehkä helpoimmin laskea vektoreiden pituuksina.

49. Kolmen pallon keskipisteet ja säteet ovat $(1, 1, 1)$, 3; $(1, 2, 3)$, 2; $(3, 2, 4)$, 4. Määritä pallojen yhteiset pisteet.

Vihje: Käytä funktiota `Solve` usean algebrallisen yhtälön muodostaman ryhmän ratkaisemiseen.

50. Kolmannen asteen polynomilla $p(x)$ on kaksinkertainen nollakohta $x = 2$ ja $p(3) = 15$, $p'(1) = 0$. Määritä $p(x)$.

Vihje: Muodosta polynomille lauseke tuntemattomin kertoimin ja johda kertoimille yhtälöryhmä ehtojen perusteella.

51. Määritä vakio a siten, että yhtälön $x^4 - ax^2 + 2x + 1 = 0$ juurten neliöiden summa on 1. Mitkä ovat vastaavien juurten likiarvot?

Vihje: a on yksinkertainen murtoluku; kaksi juurista on kompleksisia. Tehtävän voi laskea monella tavalla. Tutki, mitä antavat seuraavantyyppiset syötteet: `neliot= x^2/.Solve[...]`, `Apply[Plus,neliot]`.

Grafiikka

52. Piirrä funktion $f(x) = \sin 8x + \sin 9x$ kuvaaja.

Vihje: Tarkastele riittävän pitkää väliä. Muista merkinnät: `Sin[8 x]` etc.

53. Tšebyševin polynomit määritellään välillä $[-1, 1]$ lausekkeella

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Piirrä polynomien T_n, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, kuvaajat samaan kuvioon.

Vihje: Funktioiden nimet ovat `Cos` ja `ArcCos`. Yhden kuvaajan piirtäminen tapahtuu komennolla `Plot`. Useita kuvioita voidaan yhdistää samaan kuvaan komennolla `Show`, jonka argumenteiksi kirjoitetaan ne tulosteet, jotka kuvaan halutaan. Esimerkiksi `%k` viittaa tulosteeseen `Out[k]`; tulosteille voidaan antaa myös nimet kirjoittamalla esimerkiksi `kuva1 = Plot ...`.

54. Piirrä sini- ja kosinifunktioiden kuvaajat muotoa

```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -Pi, Pi},
   PlotStyle -> {Dashing[{0.1, 0.05}],
   {RGBColor[0.9, 0.3, 0.4], Thickness[0.05]}}
```

olevalla käskyllä. Selvitä kokeilemalla, mitä `PlotStyle`-määrittelyssä olevat parametrit vaikuttavat kuvioon.

Vihje: Parametrien merkitystä voi tutkia myös Mathematican dokumentaatiosta.

55. Piirrä funtion $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 5x$ kuvaaja.

Vihje: Tarvittava funktio on `Plot3D`. Tutki piirtoalueen vaikutusta kuvaajan muotoon ja miten siihen voidaan vaikuttaa `Plot3D`-funktion optioilla (katso dokumentaatiota).

56. Piirrä funtion $f(x, y) = \arctan(y/x)$ kuvaaja. Miten funktio käyttäytyy origon ympäristössä? Miten funktion voi luonnehtia geometrisesti? Onko funktio jatkuva?

Vihje: Funktionnimi on `ArcTan`. Tarvittava piirtokomento on `Plot3D`. Piirtotiheyttä voi säätää optioilla `PlotPoints` tai `Mesh`. Muitakin optioita on; katso dokumentaatiota.

57. Piirrä kahden muuttujan funktion $f(x, y) = \log_y x$ kuvaaja.

Vihje: Mieti ensin, millä arvoilla (x, y) funktio on määritelty.

58. Piirrä kahden muuttujan funktion

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

kuvaaja. Tutki erityisesti funktion käyttäytymistä origon ympäristössä.

Vihje: Käytä sekä funktiota `Plot3D` että funktiota `ParametricPlot3D`. Voitaisiinko käyttää napakoordinaatteja? Säädä piirtotiheys sopivaksi optiolla `Mesh`. Onko funktio jatkuva origossa?

59. Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta käyrästä

$$x = \cos pt, \quad y = \sin qt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

missä p ja q ovat numeerisia kertoimia.

Vihje: Piirtokomento on `ParametricPlot`. Tutki myös, mitä optioita on käytettävissä.

60. Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta kolmiulotteisen avaruuden käyrästä

$$x = (5+\cos 25t)\cos 5t,\ y = (5+\cos 25t)\sin 5t,\ z = \sin 25t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vihje: Piirtokomento on `ParametricPlot3D`.

61. Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta kolmiulotteisen avaruuden käyrästä

$$x = (2\pi - t)\cos 5t,\ y = (2\pi - t)\sin 5t,\ z = t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Muunna parametriesitystä siten, että saadaan pallopinnalla sijaitseva spiraali.

Vihje: Piirtokomento on `ParametricPlot3D`. Piirtotiheyttä voidaan säätää optiolla `PlotPoints`. Pallopinta: Jos korkeuskoordinaatti on t, niin mikä on pisteen etäisyys z-akselista?

62. Piirrä alueessa $-25 \le x \le 25$, $-5 \le y \le 5$ kuva käyrästä $x = y^3 - 5y^2 + y + 3$ `ParametricPlot`-funktiolla.

Vihje: Valitse parametriksi y.

63. Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta ruuvipinnasta:

$$x = u(1 - \frac{v}{8\pi})\cos v, \quad y = u(1 - \frac{v}{8\pi})\sin v, \quad z = \frac{1}{5}(v-u), \quad u \in [0,3],\ v \in [0, 8\pi].$$

Vihje: Piirtokomento on `ParametricPlot3D`. Säädä piirtotiheys sopivaksi, niin että saat kauniin kuvan: optio `Mesh`.

64. Tutki, millaista pintaa esittää parametriesitys

$$x = \cos u(a + b\cos v),\ y = \sin u(a + b\cos v),\ z = b\sin v, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, 2\pi].$$

Anna piirtämistä varten vakioille a ja b erilaisia (positiivisia) arvoja ja yritä päästä selville niiden merkityksestä. Tutki myös, mitä vaikuttaa optio `Shading->False` grafiikkakomennossa.

Vihje: Tutki aluksi tapausta, missä $a/b = 2$, mutta tarkastele myös tapauksia, missä suhde on $= 1$ tai < 1. Pinnasta saa paremman käsityksen piirtämällä siitä vain sopivan osan, ts. rajoittamalla parametrien u ja v vaihteluväliä.

65. Yhtälö

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - 10x^2 - 10y^2 + 6z^2 + 9 = 0$$

esittää erästä kolmiulotteisen avaruuden pintaa, *ymyrärengasta* eli *torusta*. Leikkaa pintaa tasoilla $z =$ vakio ja $x =$ vakio ja piirrä leikkauskäyrät.

Vihje: Käytä funktiota `ContourPlot`. Millaisia kvalitatiivisesti erilaisia leikkauskäyriä syntyy?

66. Piirrä origon ympäristössä kuva käyrästä $y^4 + y^2 + xy = x^3 - x$.

Vihje: Käytä funktiota `ContourPlot`.

67. Tutki, mitkä xy-tason pisteet toteuttavat yhtälön $\log_y x = \log_x y$. Piirrä kuvio.

Vihje: Logaritmifunktio on `Log`. Käytä funktiota `ContourPlot`. Mieti, mikä on sopiva piirtoalue.

68. Tutki funktion $f(x, y) = y^x$ käyttäytymistä origon ympäristössä alueessa $x > 0$, $y > 0$: piirrä kuvaaja (pinta), piirrä pinnan korkeuskäyriä, laske funktion arvoja. Mitä arvoja funktio saa origoa lähestyttäessä?

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Plot3D`, `ContourPlot`. Jälkimmäiselle voidaan antaa optiona korkeuskäyrien korkeudet muodossa `Contours->{...}`, missä korkeudet luetellaan listassa; katso myös dokumentaatiota.

69. Piirrä origon ympäristössä kuva pinnasta $x^3 + y^3 + z^3 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 - 1 = 0$.

Vihje: Käytä funktiota `ContourPlot3D`. Katso dokumentaatiosta käyttöohjeet.

Funktiot

70. Mathematica tuntee ns. *gammafunktion* $\Gamma(x)$ nimellä `Gamma`. Piirrä tämän ja sen derivaatan kuvaajat. Mitä arvoja funktio saa positiivisilla kokonaislukuarvoilla?

Vihje: Skaalaa graafinen esitys siten, että kuvaajien luonne tulee selkeästi näkyviin. Funktion arvot positiivisilla kokonaislukuarvoilla voidaan ilmaista yksinkertaisesti. Miten?

71. Määrittele Mathematicalle funktio $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}$. Laske funktion arvo pisteissä $x = -1,\ 0,\ 1$. Piirrä kuvaaja. Mikä funktion raja-arvo origossa? Onko tämä olemassa? Onko funktio jatkuva?

Vihje: Funktion määrittelyssä voidaan tässä tapauksessa käyttää yhtä hyvin merkkiä `=` tai merkkiä `:=`. Raja-arvo voidaan laskea myös funktiolla `Limit`; katso ohjeet dokumentaatiosta ja kokeile.

72. Piirrä funktion $\log_x 2$ kuvaaja ja laske sen derivaatta. Voidaanko funktio lausua luonnollisen logaritmin avulla?

Vihje: Mathematican funktio `Log` on luonnollinen logaritmi. $\log_k x$ merkitään `Log[k,x]`. Ks. myös dokumentaatiota.

73. Mathematicassa on kaksi operaattoria, joita voidaan käyttää funktioiden määrittelyssä: joko `=` (eli `Set`) tai `:=` (eli `SetDelayed`). Yritä selvittää näiden ero määrittelemällä kaksi funktiota seuraavasti:

```
f[x_,n_]= Expand[x^n]
g[x_,n_]:= Expand[x^n]
```

Laske tämän jälkeen `f[a+b,5]` ja `g[a+b,5]`.

Vihje: Delay = viivästää. Katso myös Mathematican dokumentaatiota. Huomaa, että `Expand` ei kehitä (ei voi kehittää) lauseketta, jonka eksponentti on symboli: Kokeile `g[a+b,n]`.

74. Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Laske taulukko sen arvoista välillä $[0, 5]$ askelena 0.1. Piirrä funktion derivaatan kuvaaja. Muodosta integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Laske funktion integraali yli reaaliakselin. Katso, mitä antaa komento `?f`.

Vihje: Funktio voidaan määritellä kahdella tavalla: antamalla muotoa `f[x_]:=`... oleva määrittely tai käyttämällä funktiota `Function`. Kokeile molempia. Taulukko muodostetaan funktiolla `Table`, derivaatta saadaan esimerkiksi kirjoittamalla `f'[x]`. Integroinnissa tarvittava äärettömyys on `Infinity`; se voidaan myös valita paletista.

75. Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ja laske sen arvot pisteissä $x = \pi/2$, $x = 1$ ja $x = 0$. Määrittele tämän jälkeen funktio origossa siten, että siitä tulee jatkuva. Laske uudelleen sen arvo origossa. Piirrä funktion kuvaaja ja kokeile, miten Mathematica tulkitsee syötteen `f'[x]`. Mitä on `f'[0]`? Katso, mitä antaa komento `?f`.

Vihje: Funktio voidaan määritellä kahdella tavalla: antamalla muotoa `f[x_]:=`... oleva määrittely tai käyttämällä funktiota `Function`. Edellistä tapaa käytettäessä voidaan lisäksi määritellä erikseen arvo yksittäisissä pisteissä: `f[0]=`... .

76. Määrittele Mathematicalle funktio, jonka kuvaaja välillä $[0, \frac{1}{2}]$ yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, 2)$ sekä välillä $[\frac{1}{2}, 1]$ pisteet $(\frac{1}{2}, 2)$ ja $(1, 0)$. Muualla funktio on $= 0$. Piirrä funktion kuvaaja.

Vihje: Funktion paloittaisessa määrittelyssä käytetään symbolia `/;` rajoittamaan määrittelyaluetta, esimerkiksi `f[x_/;x > -1 && x < 1]:=`... . Vaihtoehtona on käyttää funktiota `Piecewise`.

77. Määrittele Mathematicalle seuraava funktio ja piirrä sen kuvaaja:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(-x), & \text{jos } x < -1, \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{jos } -1 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{arcosh} x, & \text{jos } x > 1. \end{cases}$$

Katso, mitä antaa komento `?f`. Onko funktio jatkuva? Entä derivoituva? Osaako Mathematica laskea sen derivaatan?

Vihje: Huomaa: Hyperbolisen kosinin käänteisfunktio (päähaara) arcosh on Mathematicassa (virheellisesti) `ArcCosh`. Funktion paloittaisessa määrittelyssä käytetään symbolia `/;` rajoittamaan määrittelyaluetta, esimerkiksi `f[x_/;x > -1 && x < 1]:=`... . Myös funktiota `Piecewise` voidaan käyttää.

78. Määrittele $\cos(nx)$ kahden muuttujan x ja n funktiona. Piirrä tätä käyttäen funktioiden $\cos x$, $\cos 2x$ ja $\cos 4x$ kuvaajat samaan kuvioon.

Vihje: Helpointa on piirtää kukin kuvaaja erikseen ja yhdistää kuviot `Show`-komennolla yhdeksi kuvioksi. Kuvion voi piirtää myös yhdellä `Plot`-komennolla.

79. Määrittele Mathematicalle kahden muuttujan funktio, jonka kuvaaja välillä $[0, \frac{1}{2n}]$ yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2n}, 2n)$ sekä välillä $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ pisteet $(\frac{1}{2n}, 2n)$ ja $(\frac{1}{n}, 0)$. Muualla funktio on $= 0$. Piirrä funktion kuvaaja.

Vihje: Funktion paloittaisessa määrittelyssä tarvittavat ehdot voidaan sijoittaa myös määrittelevän lausekkeen jälkeen, esimerkiksi `f[x_,_n]:=4 n^2 x/;x >= 0 && x <= 1/(2 n)`.

80. Laske derivoimalla yhdistetyn funktion $f(g(x))$ ensimmäinen, toinen ja kolmas derivaatta.

Vihje: Yhdistettyä funktiota voidaan käsitellä suoraan muodossa `f[g[x]]`. Saisitko samat tulokset laskemalla käsin?

81. Jos g on funktion f käänteisfunktio, on kaikilla arvoilla x voimassa $f(g(x)) = x$. Derivoi tätä yhtälöä kahdesti ja ratkaise tuloksista lausekkeet funktion g ensimmäiselle ja toiselle derivaatalle lausuttuina funktion f derivaattojen ja funktion g arvon $g(x)$ avulla.

Vihje: Derivointi voidaan suoran kohdistaa yhtälöön: `D[f[g[x]]==x,x]`. Tulokset: $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, $g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))^3}$. Saatko samat tulokset laskemalla käsin?

82. Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| \, dt.$$

Piirrä tämän määritelmän perusteella funktion ja sen derivaatan kuvaajat.

Vihje: Itseisarvofunktio (`Abs`) integraalin sisällä saattaa aiheuttaa ongelmia. Kokeile itseisarvojen käyttöä, mutta määrittele funktio myös paloittain itseisarvolausekkeen merkkien mukaan kolmessa osassa. Tutki, osaako Mathematica derivoida määrittelemiäsi funktioita.

83. Ratkaise toisen asteen $ax^2 + 2x + 1 = 0$ yhtälö ja määrittele funktiot, jotka esittävät yhtälön juuria kertoimen a funktioina. Piirrä näiden funktioiden kuvaajat. Missä alueessa funktiot ovat määriteltyjä? Miten ne käyttäytyvät, kun $a \to 0$, jolloin yhtälö muuttuu ensimmäisen asteen yhtälöksi?

Vihje: Ratkaise yhtälö `Solve`-komennolla ja käytä tulosta suoraan funktioiden määrittelyssä. Funktionmäärittelyssä on syytä käyttää merkkiä `=` eikä `:=`. (Miksi?)

84. Fibonaccin luvut määritellään ehdoilla $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$. Määrittele Mathematican funktio, joka laskee Fibonaccin lukuja antamalla määrittelyt `a[0]=1; a[1]=1; a[n_]:=a[n-1]+a[n-2]` ja laske tämän avulla Fibonaccin luvut a_{10} ja a_{20}. Muodosta myös taulukko, jossa on 20 ensimmäistä lukua.

Vihje: Ennen Mathematican funktion `a` määrittelyä anna komento `Remove[a]`, jolla poistetaan mahdolliset aiemmat määrittelyt. Katso myös, mitä komento `?a` määrittelyn jälkeen antaa. Kyseessä on rekursiivinen funktiomäärittely. Taulukko voidaan muodostaa funktiolla `Table`. Miksi taulukon laskeminen kestää?

85. Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ määritellään ehdoilla

$$f(n) = n - 5, \quad \text{kun } n > 10,$$
$$f(n) = f(f(n+6)), \quad \text{kun } 1 \le n \le 10.$$

Tutki, mitä arvoja funktio saa.

Vihje: Funktion arvot voidaan laskea taulukkoon `Table`-funktiolla. Miten laskisit käsin arvon $f(1)$?

86. Olkoot A ja B äärellisen monen alkion joukkoja. Joukossa A on m alkiota ja joukossa B on n alkiota. Olkoon $S(m,n)$ surjektioiden $A \to B$ lukumäärä. Tälle pätee

$$S(m,1) = 1,$$
$$S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m,k), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Muodosta surjektioiden määrän osoittava taulukko, kun $1 \le m \le 5$, $1 \le n \le 5$. Onko itsestään selvää, mitkä taulukon alkiot ovat $= 0$? Miksi? Mitä lukuja ovat taulukon lävistäjäalkiot? Osaatko päätellä kaavojen pätevyyden?

Vihje: Surjektio $A \to B$ on funktio, jossa jokainen maalijoukon B alkio on jonkin alkion kuva. Summa voidaan muodostaa funktiolla `Sum`, binomikerroin on `Binomial`. Taulukon (kaksinkertaisen listan) voi muodostaa `Table`-komennolla ja sen saa näkymään kaksiulotteisena kirjoittamalla perään `//TableForm`.

87. Mathematicalle voidaan määritellä myös monimutkaisempia funktioita funktioidenmäärittelyfunktion `Function` avulla. Määrittele funktio f asettamalla

```
f = Function[x,FactorInteger[x][[1,1]]]
```

ja tutki, mitä se laskee, kun argumenttina on luonnollinen luku.

Vihje: Tutki erikseen, mitä `FactorInteger` antaa. Indeksimerkintä `[[1,1]]` poimii sen tulostuksesta osan.

Differentiaali- ja integraalilaskenta

88. Derivoi funktiot x^n, x^x, $\sin^4 x + \cos^4 x$. Integroi saamasi tulokset. Päädytäänkö takaisin samaan funktioon, josta lähdettiin?

Vihje: Huomaa merkintä: `Sin[x]^4` etc. Kahden lausekkeen samuutta voi tutkia tarkastelemalla niiden erotusta. Tämän vertaaminen nollaan on yleensä helpompaa kuin kahden monimutkaisen lausekkeen vertaaminen toisiinsa. Toisena vaihtoehtona on tarkastella lausekkeiden kuvaajia.

89. Laske funktion $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ kahdeskymmenes derivaatta ja tälle sekä tarkka arvo että likiarvo pisteessä $x = 5$.

Vihje: Yritä suoriutua mahdollisimman vähillä Mathematican käskyillä!

90. Muodosta funktion $\tan x$ kertalukuja $1, 2, \ldots, 20$ olevat derivaatat. Mikä on kertalukua 10 olevan derivaatan arvo origossa?

Vihje: Helpointa on muodostaa derivaatoista lista. Jos listan nimi on `lst`, sen k:s alkio on `lst[[k]]`. Mathematica käyttää trigonometrisia funktioita *sekantti* sec ja *kosekantti* csc. Nämä määritellään yksinkertaisesti: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

91. Laske funktion $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ derivaatta jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Onko derivaattafunktio jatkuva? Piirrä sen kuvaaja.

Vihje: Funktio on derivoituva myös origossa, mutta derivaatta on laskettava erotusosamäärän raja-arvona (miksi?). Mathematicassa on valmiina funktio `Limit`.

92. Olkoot f ja g derivoituvia funktioita. Laske tulon ja yhdistetyn funktion derivaatat, so. derivoi lausekkeet $f(x)g(x)$ ja $f(g(x))$.

Vihje: Poista ensin funktioille mahdollisesti aiemmin tehdyt määrittelyt: `Remove[f,g]`. Määräämätön funktio voidaan ottaa käyttöön yksinkertaisesti kirjoittamalla `f[x]`.

93. Olkoon f, g ja h derivoituvia kahden muuttujan funktioita. Laske yhdistetyn funktion $f(g(x,y), h(x,y))$ osittaisderivaatat. Ovatko saadut lausekkeet sitä, mitä pitäisi?

Vihje: Määräämätön funktio voidaan ottaa käyttöön kirjoittamalla `f[x,y]`. Jos olet aiemmin käyttänyt samaa symbolia jossakin muussa merkityksessä, hävitä se ensin: `Remove[f]`. Derivointioperaattori on `D` riippumatta siitä, lasketaanko tavallisia vai osittaisderivaattoja.

94. Yhtälö $x = y^3 + y^2 + y + 1$ määrittelee funktion $y(x)$, joka origossa saa arvon -1. Laske implisiittisellä derivoinnilla $y'(0)$.

Vihje: Sijoita yhtälöön y:n paikalle $y(x)$ ja derivoi yhtälö.

95. Laske funktion $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1-x}{1+x}$ derivaatta ja saata se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Mitä tästä voidaan päätellä?

Vihje: arctan on Mathematicassa `ArcTan`. Piirrä myös kuvio.

96. Muodosta funktion $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ensimmäinen ja toinen derivaatta. Piirrä näiden kuvaajat.

Vihje: arctan on Mathematicassa `ArcTan`.

97. Integroi funktio x^n. Onko tulos oikein kaikilla n? Onko samantekevää, jos jollekin symbolille ensin annetaan arvo ja sitten muokataan symbolin sisältävää lauseketta, tai jos ensin muokataan lauseketta ja vasta sitten annetaan symbolille arvo?

Vihje: Kokeile: `Integrate[x^n/.n->-1,x] == Integrate[x^n,x]/.n->-1`. Sijoita myös muuttujalle n jokin muu arvo. Miten selität tulokset?

98. Etsi funktion e^{-x^2} integraalifunktio. Laske määrätyt integraalit

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Määritä näille myös likiarvot. Mitä saatu integraalifunktion lauseke tarkoittaa?

Vihje: Funktiolla `Integrate` lasketaan sekä integraalifunktioita että määrättyjä integraaleja. Äärettömyys on `Infinity`; se voidaan myös valita paletista. Mathematica tuntee monia muitakin funktioita kuin ns. tavalliset alkeisfunktiot. Mitä nämä oikeastaan ovat, ei aina ilmene dokumentaatiosta, koska määritelmät eivät välttämättä ole yksinkertaisia.

99. Laske integraalit

$$\text{a)} \int \frac{x+1}{(x^2-x+1)^{10}}\,dx, \qquad \text{b)} \int \ln(1+x^{12})\,dx.$$

Ovatko Mathematican antamat tulokset oikein? Miten nämä voisi tarkistaa? Millaista menetelmää pitäisi käsinlaskussa käyttää?

Vihje: Symbolisissa ohjelmissa derivointi on yleensä integrointia luotettavampaa. Tarkistus voi siis tapahtua derivoimalla. Logaritmifunktio on `Log`; ks. dokumentaatiota.

100. Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13-12\cos 2x}\,dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

Vihje: Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

101. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Onko tämä jatkuva? Pitäisikö sen olla jatkuva? Laske funktion integraali jakson $[0, 2\pi]$ yli a) integroimalla analyyttisesti komennolla `Integrate`, b) integroimalla numeerisesti komennolla `NIntegrate`, c) muodostamalla ensin integraalifunktio komennolla `Integrate` ja sijoittamalla rajat tähän korvausoperaattoria käyttäen.

Vihje: Komennolla `Integrate` lasketaan sekä integraalifunktio että määrätty integraali. Numeeriselle integroinnille (määrätyn integraalin laskemiseen) on komento `NIntegrate`. Korvausoperaattori on `ReplaceAll` eli `/.` .

102. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 10$ nollakohdat, ääriarvopisteet ja käännepisteet. Piirrä kuvaaja.

Vihje: Talleta aluksi funktion lauseke jollakin nimellä, jotta siihen viittaaminen myöhemmin on helppoa. Tarvittavia funktioita: `D`; `Solve`, `NSolve`. Arvojen sijoittaminen johonkin lausekkeeseen tapahtuu korvausoperaattorilla `/.` eli `ReplaceAll`. Mikäli saadut numeeriset lausekkeet näyttävät hankalilta, ne voi hahmottaa paremmin laskemalla likiarvot funktiolla `N`. Myös funktiosta `Chop` saattaa olla iloa; ks. dokumentaatiota.

103. Määritä funktion $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 41x - 3$ reaaliset nollakohdat, ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä käännepisteet.

Vihje: Piirrä kuvio. Ovatko tarkat arvot löydettävissä?

104. Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Vihje: arcsin on Mathematicassa `ArcSin`. Piirrä myös kuvio.

105. Laske funktion funktion $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 41x - 3$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

Vihje: Piirrä kuvio. Siirry tarvittaessa numeeriseen laskentaan.

106. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y = x^2 - 3$ ja $y = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

Vihje: Siirry tarvittaessa numeeriseen laskentaan.

107. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

Vihje: Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

108. Laske käyrien $y = x^3 - 3x$ ja $y = -x^3 + x$ rajoittaman kaksiosaisen alueen pinta-ala.

Vihje: Piirrä kuvio. Määritä integroimisrajat. Varsinainen integrointi voidaan tehdä monella eri tavalla: integroimalla symbolisesti tai numeerisesti, integroimalla funktioiden erotuksia tai erotuksen itseisarvoa.

109. Käyrä $y = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus ja pinnan ala. Parametrisoi pinta ja piirrä se.

Vihje: Valitse parametrisoinnissa toiseksi parametriksi x ja toiseksi pyörähdyskulma. Piirtäminen funktiolla `ParametricPlot3D`. Muista: `Sin[x]^2` jne.

110. Paraabelin $y = -4x^2 + 40x - 97$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

Vihje: Kappaleen voi ajatella muodostuvan joko vaakasuorista tasoleikkauksista tai lieriöpinnoista, joiden akselina on y-akseli. Nämä johtavat kahteen erilaiseen integraaliin, jotka luonnollisestikin antavat saman tuloksen.

111. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x-akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.

Vihje: Periaatteessa yksinkertainen integrointi, mutta tutki tarkoin, mitä funktiota on integroitava.

112. Puutarhuri viljelee tomaatteja, joiden muoto määräytyy kardioidin $r = a(1 + \cos\varphi)$ pyörähtämisestä x-akselin ympäri. Piirrä kardioidi. Laske tomaatin tilavuus. Tuntuuko saamasi tilavuus uskottavalta? Anna vakiolle a jokin lukuarvo ja laske vastaava tilavuuden likiarvo. Piirrä kuvio tomaatista.

Vihje: Valitse kardioidin parametrisoinnissa napakulma φ parametriksi, lausu x ja y tämän avulla ja käytä funktiota `ParametricPlot`. Vaihtoehtona on käyttää funktiota `PolarPlot`. Tomaattipinnan parametrisoinnissa ota parametreiksi napakulma φ ja pyörähdyskulma x-akselin ympäri. Piirtäminen tapahtuu funktiolla `ParametricPlot3D`. Tilavuus saadaan periaatteessa integraalista $\int y^2\,dx$, johon on tehtävä sellaiset sijoitukset, että muuttujaksi saadaan napakulma φ.

113. Laske kardioidin $r = 1 + \cos\varphi$ kaarenpituus. Piirrä kuvio. Miten saat kardioidin kuvan oikeanmuotoiseksi? Tuntuuko saamasi pituus uskottavalta?

Vihje: Kaarenpituusintegraali: $\int ds = \int \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, d\varphi$.

114. Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

Vihje: Käyrä on luontevinta kirjoittaa vektoriksi `r = {Cos[t]/t,Sin[t]/t,ArcTan[t]}` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

115. Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.

Vihje: Laskusta tulee selkeämpi, jos se lasketaan symboleja käyttäen ja vasta lopuksi asetetaan näille arvot. Arvojen sijoittamiseksi on luontevaa määritellä korvaussääntö `{r->6.6, s->11.0, h->Sqrt[11.0^2-6.6^2]}`, jolloin arvot voidaan helposti sijoittaa mihin tahansa välitulokseenkin ja tämän jälkeen jatkaa laskua symboleilla.

116. R-säteisen pallon ympäri asetetaan mahdollisimman pieni neliöpohjainen suora pyramidi siten, että pallo sivuaa pyramidin pohjaa ja sivutahkoja. Laske pallon tilavuuden suhde pyramidin tilavuuteen.

Vihje: Lausu pyramidin tilavuus sopivan muuttujan avulla. Tätä varten tarvitaan sopivien kolmioiden yhdenmuotoisuutta. Hyödynnä Mathematican komentoja, jotta et joudu syöttämään käsin aiempien laskujen tuloksia!

117. Osoita, että käyrän $y = e^{-x}\sin x$ ja x-akselin alueessa $x \geq 0$ rajoittamien alueiden $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$ pinta-alat muodostavat geometrisen jonon. Laske integraali $\int_0^\infty |e^{-x}\sin x|\,dx$.

Vihje: Määrittele alueen A_n pinta-ala funktioksi: `a[n_]:=`... ja sievennä (`Simplify`, `FullSimplify`) peräkkäisten alojen suhteen lauseke. Funktiolla `Sum` voi laskea myös äärettömän monen termin summia.

118. Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = ax^2$. Suoran kulman kärkeen asetetaan paraabelin normaali. Osoita, että kolmion hypotenuusa leikkaa normaalin samassa pisteessä riippumatta kolmion kahden muun kärjen sijainnista. Määritä leikkauspiste.

Vihje: Esimerkiksi: Laske leikkauspiste, kun suoran kulman kärjen x-koordinaatti on t ja toisen kateetin kulmakerroin on k.

119. Pallon muotoiseen nestesäiliöön, jonka säde on yksi metri, pumpataan nestettä nopeudella 10 litraa sekunnissa. Piirrä kuvaaja, joka esittää nestepinnan korkeutta säiliössä ajan funktiona. Kuinka kauan säiliön täyttäminen kestää? Piirrä nestepinnan korkeuden nousunopeuden kuvaaja.

Vihje: Ratkaise nestepinnan korkeus nestetilavuuden funktiona ja valitse saaduista ratkaisuista oikea. Lauseke on hankala, mutta Mathematica pystyy kuitenkin käsittelemään sitä.

120. Muodosta kuusi satunnaislukua, jotka ovat peräisin välien $[-5,-3]$, $[-2,-1]$, $[1,2]$, $[3,5]$, $[-0.5,0.5]$ ja $[1,2]$ tasaisesta jakaumasta. Näistä neljä ensimmäistä olkoot neljännen asteen polynomin nollakohdat, kaksi viimeistä määrittävät pisteen, jonka kautta polynomin kuvaaja kulkee. Suurimman ja pienimmän nollakohdan välisellä alueella polynomin kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri ja muodostaa pyörähdyskappaleen. Laske tämän tilavuus ja pinta-ala; piirrä kuvio.

Vihje: Satunnaislukuja generoidaan funktiolla `RandomReal`, jolle voidaan antaa argumentiksi mm. väli, jolta lukuja halutaan.

Differentiaaliyhtälöt

121. Osoita, että polynomit x^2+x ja x^2+1 toteuttavat differentiaaliyhtälön $(x^2-2x-1)y''-2(x-1)y'+2y=0$.

Vihje: Talleta differentiaaliyhtälö Mathematican muistiin siten, että funktion y argumentit ovat paikoillaan: `y"[x]` jne. Määrittele vuorollaan kumpikin polynomi Mathematican funktioksi (`p[x_]:= ...`) ja sijoita tämä yhtälöön: (`yhtalo/.y->p`). Sievennä tarvittaessa.

122. Osoita, että funktio

$$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+\cos x\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $y''+y=\tan x$. Luvut C_1 ja C_2 ovat vakioita.

Vihje: Joko: Muodosta funktion y ja erikseen lasketun toisen derivaatan summa ja sievennä tämä. Tai: Määrittele y Mathematican funktioksi ja sievennä `y"[x] + y[x]`. Logaritmifunktio on `Log`. Itseisarvot voidaan jättää huomiotta, sillä Mathematica tuntee logaritmifunktion $\ln x$ myös negatiivisilla argumenteilla x, jolloin se eroaa funktiosta $\ln|x|$ vain kompleksisella vakiolla $i\pi$. Kokeile: `FullSimplify[ComplexExpand[Log[-x]], x > 0]`.

123. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''+y=x^2$. Etsi myös alkuehtoa $y(0)=1$, $y'(0)=2$ vastaava yksittäisratkaisu.

Vihje: Käytä komentoa `DSolve`, jonka avulla voidaan löytää sekä yleinen ratkaisu että yksittäisratkaisu.

124. Etsi yleinen ratkaisu Airyn differentiaaliyhtälölle $y''-xy=0$. Mitä ratkaisussa esiintyvät funktiot ovat?

Vihje: Käytä komentoa `DSolve`. Ratkaisu ei ole lausuttavissa tavallisten alkeisfunktioiden avulla, mutta kylläkin Mathematican tuntemien funktioiden avulla.

125. Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?

Vihje: Käytä funktioita `DSolve` ja `Solve`. Kumpikin antaa ratkaisun korvaussäännön muodossa. Ratkaisu voidaan tallettaa muuttujaksi jatkokäsittelyä varten korvausoperaattorilla, esimerkiksi `lukum= y[t]/.ratkaisu`.

126. Lohenviljelyaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähetä yhtälön

$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$

mukaisesti. Tässä $P(t)$ on kalamäärä hetkellä t, ja aika t on mitattu viikkoina. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet?

Vihje: Käytä funktioita `DSolve` ja `Solve`. Kumpikin antaa ratkaisun korvaussäännön muodossa. Ratkaisu voidaan tallettaa muuttujaksi jatkokäsittelyä varten korvausoperaattorilla, esimerkiksi `lukum= y[t]/.ratkaisu`.

Sarjat

127. Laske sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ summa ja piirrä kuvio, joka osoittaa, miten osasummat lähestyvät sarjan summaa.

Vihje: Muodosta osasummista lista ja piirrä kuvio funktiolla `ListPlot`.

128. Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

Vihje: Sarjan summa lasketaan funktiolla `Sum`. Suppenemisalueen tarkastelussa voidaan käyttää funktiota `Reduce` reaalilukualueella (`Reals`).

129. Muodosta funktiolle $f(x) = \exp(\arctan x)$ Maclaurinin polynomeja. Valitse asteluvuiksi ainakin 10, 20, 30, 40 ja 50. Vertaa näiden kuvaajia funktion kuvaajaan. Millä muuttujan arvoilla Maclaurinin sarja näyttäisi suppenevan?

Vihje: Käytä funktiota `Series`. Sarjan jäännöstermi voidaan pudottaa pois komennolla `Normal`.

130. Kehitä funktio $f(x) = \sqrt{9x^2 - 3x + 5}$ Taylorin sarjaksi pisteissä $x = 0$, $x = 2$ ja $x = 5$. Piirrä Taylorin polynomien kuvaajat astelukuun 10 saakka ja vertaa niitä funktion kuvaajaan. Miten laajassa alueessa Taylorin sarja näyttäisi suppenevan?

Vihje: Sarja muodostetaan komennolla `Series`, jolle on myös ilmoitettava, montako termiä alusta lähtien halutaan. Tuloksessa on muotoa `O[x^n]` oleva jäännöstermi, joka on pudotettava pois, jotta osasumman kuvaaja saadaan piirretyksi. Tämä tehdään komennolla `Normal`.

131. Suhteellisuusteorian mukainen kappaleen kineettinen energia on

$$T = mc^2 - m_0c^2, \quad \text{missä } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Osoita origokeskiseksi Taylorin sarjaksi kehittämällä, että pienillä nopeuksilla v tämä on likimain sama kuin klassinen kineettinen energia $\frac{1}{2}m_0v^2$.

Vihje: Komento `Series`.

Vektorit ja listat

132. Jaa vektori $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ vektoreiden $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

Vihje: Esitä vektorit kaksialkioisina listoina. Muodosta näiden avulla vektoriyhtälö ja ratkaise se `Solve`-funktiolla.

133. Olkoot $A = (7, 3)$, $B = (1, 2)$ ja $C = (3, 5)$ tason pisteitä. Muodosta kulman ABC puolittajan suuntavektori ja sen suuntainen yksikkövektori.

Vihje: Syötä aluksi pisteet kahden alkion listoina ja muodosta näiden avulla tarvittavat vektorit. Puolittajavektori saadaan helpoimmin kulman kylkien suuntaisten yksikkövektoreiden summana.

134. Kolmion kärkipisteet ovat $(1, 2)$, $(-3, 5)$ ja $(-1, -6)$. Määritä kolmion keskijanojen leikkauspiste (x, y) muodostamalla sille vektoriyhtälöt ja ratkaisemalla koordinaatit näistä. Osoita laskemalla, että keskijanat todellakin leikkaavat samassa pisteessä, joka jakaa keskijanat suhteessa $1 : 2$.

Vihje: `Solve`-komennolla voidaan ratkaista myös vektoriyhtälöiden muodostama ryhmä. Vaadi esimerkiksi, että pisteen (x, y) ja kolmion kärkipisteen yhdysvektori on samasta kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen suuntautuvan vektorin skalaarikerrannainen. Koska kärkiä on kolme, saadaan kolme vektori- eli kuusi skalaariyhtälöä, joissa on viisi tuntematonta: x, y ja kolme skalaarikerrointa.

135. Todista yleisesti, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa ne suhteessa $1 : 2$. Tarkastele tätä varten kolmiota, jonka kärkipisteet ovat (a_1, a_2), (b_1, b_2) ja (c_1, c_2). Merkitse keskijanojen leikkauspistettä (x, y) ja muodostama sille vektoriyhtälöt. Ratkaise nämä ja tulkitse tulos.

Vihje: `Solve`-komennolla voidaan ratkaista myös vektoriyhtälöiden muodostama ryhmä. Vaadi esimerkiksi, että pisteen (x, y) ja kolmion kärkipisteen yhdysvektori on samasta kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen suuntautuvan vektorin skalaarikerrannainen. Koska kärkiä on kolme, saadaan kolme vektori- eli kuusi skalaariyhtälöä, joissa on viisi tuntematonta: x, y ja kolme skalaarikerrointa.

136. Vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ ovat kolmion kärkipisteiden A, B ja C paikkavektorit. Olkoon P sivuille AC ja BC piirrettyjen korkeusjanojen leikkauspiste ja $\mathbf{p}$ sen paikkavektori. Tällöin pätee

$$(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0, \quad (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

Jos voidaan todistaa, että myös $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$, on tullut todistetuksi, että kaikki kolme korkeusjanaa leikkaavat samassa pisteessä. Suorita todistus Mathematican vektorialgebraa käyttäen.

Vihje: Esitä tehtävän vektorit symbolisina kaksi- (tai kolmi-) komponenttisina listoina, so. Mathematican vektoreina. Funktioista `Simplify` ja `FullSimplify` on apua; katso dokumentaatiota.

137. Kolmiulotteisen avaruuden taso kulkee pisteiden $A = (7, 3, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ ja $C = (3, 5, -5)$ kautta. Laske tason yksikkönormaalivektori.

Vihje: Syötä pisteet kolmialkioisina listoina ja laske näillä. Normaali voidaan määrittää joko skalaaritulojen avulla tai vektorituloa käyttäen.

138. Määritä u siten, että vektoreiden $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $u\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ välinen kulma on 60 astetta.

Vihje: Hyödynnä skalaarituloa. Mieti, montako ratkaisua tehtävällä on. Tarkista saamasi tulos.

139. Kolmiulotteisessa avaruudessa sijaitsevan kolmion kärkipisteet ovat $(1, 2, 3)$, $(-2, 4, 5)$ ja $(2, -5, -7)$. Laske kolmion ala.

Vihje: Käytä vektoreita. Kolmion ala voidaan lausua ristitulon (`Cross`) avulla.

140. Kolmiulotteisessa avaruudessa sijaitsevan kolmion kärkipisteet ovat $(1, 2, 3)$, $(-2, 4, 5)$ ja $(2, -5, -7)$. Laske kolmion kulmien suuruudet asteissa.

Vihje: Sovella vektorialgebraa, erityisesti skalaarituloa. Kosinifunktion käänteisfunktio on `ArcCos`; tämä antaa kulman suuruuden radiaaneina.

141. Mikä suoran $(x, y) = (1, 2) + t(3, 4)$ piste on lähinnä pistettä $(8, 1)$? Mikä on tämä lyhin etäisyys?

Vihje: Käytä vektorialgebraa.

142. Mikä suoran $(x, y, z) = (3, 0, 1) + t(1, 1, 4)$ piste on lähinnä pistettä $(1, 4, 2)$? Mikä on tämä lyhin etäisyys?

Vihje: Käytä vektorialgebraa.

143. Missä pisteessä suora $(x, y, z) = (1, 2, 3)+t(4, 5, 6)$ leikkaa tason $x-2y+3z-4 = 0$?

Vihje: Käytä vektorialgebraa.

144. Taso kulkee pisteiden $(1, 2, 3)$, $(-2, 4, 5)$ ja $(2, -5, -7)$ kautta. Mikä tason piste on lähinnä pistettä $(3, 2, 1)$ ja mikä on tämä lyhin etäisyys?

Vihje: Käytä vektorialgebraa.

145. Tarkastellaan avaruuskäyrää $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Piirrä käyrä.

a) Muodosta käyrälle parametriesitys, missä parametrina on arvoa $t = 0$ vastaavasta pisteestä parametrin t kasvusuuntaan mitattu kaarenpituus s.

b) Määritä käyrältä piste P, joka on käyrää pitkin mitattuna etäisyydellä 2 pisteestä $(1, 1, 0)$ parametrin t kasvusuuntaan. Laske koordinaattien likiarvot ja vertaa kuvaan.

c) Laske käyrän kaarevuus ja kierevyys pisteessä P sekä tähän pisteeseen liittyvä kolmikanta $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$.

d) Määritä käyrän pisteeseen P liittyvän kaarevuusympyrän keskipiste ja säde.

e) Missä pisteessä käyrän kaarevuus on suurimmillaan ja mikä on maksimiarvo? Vastaavatko arvot kuvaa?

f) Missä pisteessä käyrän kierevyys on suurimmillaan ja mikä on maksimiarvo?

Vihje: Kertaa käyräteoria jostakin oppikirjasta! Em. laskujen läpivieminen johtaa yleensä vaikeuksiin, koska kaarenpituusintegraalista tulee liian monimutkainen. Tehtävän käyrä on kuitenkin poikkeuksellinen: lasku onnistuu! Syötä käyrä Mathematican vektorina, so. kolmialkioisena listana ja laske vektorialgebraa käyttäen.

146. Muodosta lista (vektori), jossa on 20 ensimmäistä alkulukua. Muodosta toinen lista, jossa on 20 ensimmäistä sellaista alkulukua, joiden järjestysluku on myös alkuluku.

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Table`, `Prime`. Kiinnostava voi olla myös `PrimeQ`

147. Määrätty integraali voidaan laskea numeerisesti esimerkiksi puolisuunnikassäännöllä

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Tässä integroimisväli on jaettu n yhtä suureen osaväliin ja luvut y_k tarkoittavat funktion arvoja jakopisteissä. Laske integraali $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ puolisuunnikassäännöllä käyttäen arvoja $n = 4, 8, 12, 16, 20$. Muodosta jokaisessa tapauksessa ensin kaksi vektoria: toisessa on funktion arvot tarvittavissa jakopisteissä ja toisessa vastaavat painokertoimet.

Vihje: Anna aluksi arvo muuttujalle n ja muodosta vektorit tämän avulla. Miten vektoreiden sisätuloa voidaan laskennassa hyödyntää? Miten tulokset saadaan helpoimmin muilla arvoilla n? Miten nämä suhtautuvat `NIntegrate`-funktion antamaan tulokseen?

148. Määrätty integraali voidaan laskea numeerisesti esimerkiksi Simpsonin säännöllä

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Tässä integroimisväli on jaettu parilliseen määrään n yhtä suuria osavälejä ja luvut y_k tarkoittavat funktion arvoja jakopisteissä. Laske integraali $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ Simpsonin säännöllä käyttäen arvoja $n = 4, 8, 12, 16$. Muodosta jokaisessa tapauksessa ensin kaksi vektoria: toisessa on funktion arvot tarvittavissa jakopisteissä ja toisessa vastaavat painokertoimet.

Vihje: Anna aluksi arvo muuttujalle n ja muodosta vektorit tämän avulla. Painokerroinvektoria muodostettaessa voidaan käyttää esimerkiksi Mathematican funktioita `If` ja `EvenQ` (katso dokumentaatiota). Miten vektoreiden sisätuloa voidaan laskennassa hyödyntää? Miten tulokset saadaan helpoimmin muilla arvoilla n? Miten nämä suhtautuvat `NIntegrate`-funktion antamaan tulokseen?

Matriisit

149. Muodosta taulukko (matriisi), jonka alkioina ovat luvut k^j, $k = 1, \ldots, 10$, $j = 1, \ldots, 10$.

Vihje: Tarvittavia funktiota: `Table`, `TableForm`; katso dokumentaatiota.

Todennäköisyyslaskenta

150. Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g?

Vihje: Tutki funktioita `NormalDistribution` ja `CDF` (= *cumulative distribution function* = kertymäfunktio), joiden avulla voidaan laskea mihin tahansa normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet.