

Harjoitus 1

1. Trooppisen vuoden pituus on 365 vrk 5 h 48 min 45 s ja Maan pyörähdysaika akselin ympäri 23 h 56 min 4 s. Ilmoita murtolukuna, kuinka monta pyörähdystä Maa tekee trooppisessa vuodessa. Mikä tulos on desimaalilukuna?

Vihje: Kertomerkki on joko välilyönti tai *; numeroiden tapauksessa * on selkeämpi (ihmiselle).

2. Sievennä lauseke $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Laske myös likiarvo 100 desimaalilla.

Vihje: Kokeile funktioita `Simplify` ja `FullSimplify`. Neliöjuurifunktio on `Sqrt`; symboli löytyy myös paletista. Likiarvon laskeminen: `N`.

3. Jaa tekijöihin kahden muuttujan polynomi

$$x^5 + 2x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 - x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 + 2y^4.$$

Kehitä saamasi tulos, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

Vihje: Tarvittavat Mathematican funktiot ovat `Expand` ja `Factor`.

4. Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat $72^\circ 50'$ suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon.

Vihje: Trigonometrinen funktioiden argumentit ilmoitetaan Mathematicassa radiaaneissa. Radiaanien ja asteiden välinen muunnoskerroin on valmiina nimellä `Degree` (katso dokumentaatiota), mutta kertoinen voi tietenkin muodostaa itsekkin. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, argumentit annetaan hakasuluissa.

5. Derivoi funktiot x^n , x^x , $\sin^4 x + \cos^4 x$. Integroi saamasi tulokset. Päädytäänkö takaisin samaan funktioon, josta lähdettiin?

Vihje: Huomaa merkintä: `Sin[x]^4` etc. Kahden lausekkeen samuutta voi tutkia tarkastelemalla niiden erotusta. Tämän vertaaminen nolnaan on yleensä helpompaa kuin kahden monimutkaisen lausekkeen vertaaminen toisiinsa. Toisena vaihtoehtona on tarkastella lausekkeiden kuvaajia.

6. Sievennä lauseke $\frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$.

Vihje: Sopivia Mathematican funktioita ovat `Simplify` ja `FullSimplify`.

7. Sievennä Tšebyševin polynomin lauseke $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{N}$, muotoon, josta ilmenee, millainen polynomi on kyseessä. Mikä on polynomin asteluku?

Vihje: Anna symbolille n numeerisia arvoja. Funktioiden nimet ovat `Cos` ja `ArcCos`.

8. Muokkaa muotoa $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $\sin^n x$, $\cos^n x$ olevia trigonometrisia lausekkeita erilaisiin muotoihin, kun n on jokin luonnollinen luku (ei symboli).

Vihje: Käytä funktioita `TrigFactor`, `TrigExpand`, `TrigReduce`, `ExpToTrig`, `TrigToExp`. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, argumentit annetaan hakasuluissa.

9. Hajota seuraavat rationaalilausekkeet osamurtokehitelemiksi, joissa nimittäjät ovat ensimmäistä astetta tai ensimmäisen asteen polynomin potensseja:

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6}, \quad \frac{2x + 7}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Miten päästään takaisin alkuperäiseen lausekkeeseen?

Vihje: Sopivia funktioita: `Apart`, `Together`, `Simplify`, `Expand` ...

10. Laske integraalit

$$\text{a) } \int \frac{x + 1}{(x^2 - x + 1)^{10}} dx, \quad \text{b) } \int \ln(1 + x^{12}) dx.$$

Ovatko Mathematican antamat tulokset oikein? Miten nämä voisi tarkistaa? Milaista menetelmää pitäisi käsinlaskussa käyttää?

Vihje: Symbolisissa ohjelmissa derivointi on yleensä integrointia luotettavampaa. Tarkistus voi siis tapahtua derivoimalla. Logaritmfunktio on `Log`; ks. dokumentaatiota.