

Harjoitus 2

1. Talleta lauseke $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ jollekin nimelle ja laske sen arvo, kun a) $x = 2, y = 3$, b) $x = -5, y = \pi$. Laske sekä tarkka arvo, että 50-desimaalinen likiarvo. Ovatko desimaaliesitykset jaksollisia?

Vihje: Käytä arvojen sijoittamisessa korvausoperaattoria /. (eli `ReplaceAll`). Likiarvojen laskeminen funktiolla `N`.

2. Ratkaise yhtälöiden

a) $168x = 195$

b) $x^2 - 2x - 4 = 0$

c) $x^3 - x^2 + x - 21 = 0$

d) $(a - b)x^2 + ax + b = 0$

kaikki juuret. Sijoita juuret takaisin yhtälöihin ja tutki, toteutuvatko yhtälöt.

Vihje: Talleta ensin yhtälö jollekin nimelle. Yhtälöissä käytetään yhtäläisyysmerkinä `==`. Yhtälön ratkaiseminen `Solve`-funktiolla tuottaa ratkaisut ns. korvaussääntöjen muodossa. Näiden avulla voidaan saadut juuret helposti sijoittaa mihin tahansa lausekkeeseen, esimerkiksi yhtälöön: `yhta1o/.korvaus`. Tässä /. on lyhennemerkintä Mathematican funktiolle `ReplaceAll`.

3. Muodosta toisen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat ratkaisemalla yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$. Laske $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, missä x_1 ja x_2 ovat saadut juuret. Tarkastele esimerkkinä yhtälöä $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

Vihje: Suorita laskut siten, että et joudu käsin syöttämään uudelleen jo laskettuja tuloksia. Käytä korvausoperaattoria `ReplaceAll` eli /. sopivalla tavalla. Esimerkkiyhtälön juuret ovat kompleksilukuja, mutta juurista muodostettu lauseke on yksinkertainen reaalinen murtoluku.

4. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 4x + 5y = 2. \end{cases}$$

Vihje: `Solve`-funktion ensimmäisenä argumenttina voi olla usean yhtälön muodostama lista ja toisena usean tuntemattoman muodostama lista.

5. Ratkaise yhtälö $\ln(x^2 + 1) = \sqrt{x + 1}$.

Vihje: Piirrä kuvio (`Plot`) ja selvitä sen avulla yhtälön juurten lukumäärä. Voidaanko juurille löytää tarkat arvot? Mitä yhtälönratkaisufunktioista `Solve`, `NSolve`, `FindRoot` voidaan käyttää? Miksi? Luonnollinen logaritmi on `Log`.

6. Etsi yhtälöparin $e^x + \sin y = 0$, $x^6 - xy + y^6 = 4$ juuret numeerisesti.

Vihje: Funktioita `Solve` ja `NSolve` ei voida käyttää, koska ne ratkaisevat vain algebrallisia yhtälöitä. Transkendenttinen yhtälö tai yhtälöryhmä voidaan ratkaista funktiolla `FindRoot`, joka oleellisesti käyttää yksi- tai useampiulotteista Newtonin menetelmää. Sopivien alkuarvojen löytämiseksi käyrät on syytä piirtää. Tällöin voidaan käyttää funktiota `ContourPlot`.

7. Etsi yhtälön $x^3 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Etsi sekä tarkat arvot että likiarvot ja sijoita kummatkin takaisin yhtälöön. Toteutuuko yhtälö?

Vihje: Likiarvot voidaan laskea joko tarkkojen arvojen likiarvoina funktiolla `N` tai suoraan käyttämällä funktiota `NSolve`. Juurten sijoittaminen yhtälöön: `yhtalo/.korvaus`, missä `/.` on lyhennemerkintä Mathematican funktiolle `ReplaceAll`.

8. Tutki eri tapoja ratkaista itseisarvoyhtälö $|x - 1| + |x - 3| = 3$ Mathematicalla.

Vihje: Itseisarvofunktio on `Abs`. Yhtälöön voidaan suoraan soveltaa yhtälöiden ratkaisemisessa käytettäviä komentoja itseisarvolausekkeita ensin purkamatta. Piirrä myös kuvio (`Plot`).

9. *Stirlingin kaavan* mukaan on

$$\ln n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Approksimointi on sitä tarkempi, mitä suurempi n on. Laske absoluuttinen ja suhteellinen approksimaatiovirhe, kun $n = 10, 100, 1000$.

Vihje: Muodosta lausekkeet absoluuttiselle ja suhteelliselle virheelle n :n funktiona ja sijoita näihin tarvittavat n :n arvot korvaussääntöä käyttäen.

10. Ratkaise käyrien

$$\begin{aligned} 16x^2 + 9y^2 + 24xy - 170x + 310y - 465 &= 0 \quad \text{ja} \\ 5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 &= 0. \end{aligned}$$

leikkauspisteiden koordinaatit. Vertaa tulosta käyrien kuvaajiin.

Vihje: Kumpi on järkevämpää: Hakea leikkauspisteiden koordinaateille tarkat arvot vai likiarvot? Kuvaajat voidaan piirtää funktiolla `ContourPlot`.