Harjoitus 4

1. Laske summat $\sum_{k=1}^{n} k^2$, kun $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Jaa tulokset tekijöihin. Ovatko jotkin summat jaottomia, so. alkutekijöitä?

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Sum`, `FactorInteger`, `PrimeQ`. Taulukoita voi tehdä funktiolla `Table`. Liittämällä loppuun määre `//TableForm` taulukko saadaan tulostetuksi havainnollisempaan muotoon.

2. Laadi taulukko sini- ja kosinifunktioiden arvoista välillä $0° - 90°$ yhden asteen välein.

Vihje: Taulukoita voi tehdä funktiolla `Table`. Liittämällä loppuun määre `//TableForm` taulukko saadaan tulostetuksi havainnollisempaan muotoon. Trigonometristen funktioiden argumenttien tulee olla radiaaneissa. Luku π kirjoitetaan `Pi`; se voidaan myös valita paletista. Muista iso alkukirjain ja hakasulut: `Sin[Pi/4]`, `Cos[0]`. Katso dokumentaatiosta: `Degree`.

3. Muodosta taulukko (matriisi), jonka alkioina ovat luvut k^j, $k = 1, \ldots, 10$, $j = 1, \ldots, 10$.

Vihje: Tarvittavia funktiota: `Table`, `TableForm`; katso dokumentaatiota.

4. Muodosta lista (vektori), jossa on 20 ensimmäistä alkulukua. Muodosta toinen lista, jossa on 20 ensimmäistä sellaista alkulukua, joiden järjestysluku on myös alkuluku.

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Table`, `Prime`. Kiinnostava voi olla myös `PrimeQ`

5. Jaa vektori $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ vektoreiden $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

Vihje: Esitä vektorit kaksialkioisina listoina. Muodosta näiden avulla vektoriyhtälö ja ratkaise se `Solve`-funktiolla.

6. Olkoot $A = (7, 3)$, $B = (1, 2)$ ja $C = (3, 5)$ tason pisteitä. Muodosta kulman ABC puolittajan suuntavektori ja sen suuntainen yksikkövektori.

Vihje: Syötä aluksi pisteet kahden alkion listoina ja muodosta näiden avulla tarvittavat vektorit. Puolittajavektori saadaan helpoimmin kulman kylkien suuntaisten yksikkövektoreiden summana.

7. Kolmiulotteisen avaruuden taso kulkee pisteiden $A = (7, 3, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ ja $C = (3, 5, -5)$ kautta. Laske tason yksikkönormaalivektori.

Vihje: Syötä pisteet kolmialkioisina listoina ja laske näillä. Normaali voidaan määrittää joko skalaaritulojen avulla tai vektorituloa käyttäen.

8. Missä pisteessä suora $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$ leikkaa tason $x - 2y + 3z - 4 = 0$?

Vihje: Käytä vektorialgebraa.

9. Vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ ovat kolmion kärkipisteiden A, B ja C paikkavektorit. Olkoon P sivuille AC ja BC piirrettyjen korkeusjanojen leikkauspiste ja $\mathbf{p}$ sen paikkavektori. Tällöin pätee

$$(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0, \quad (\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0.$$

Jos voidaan todistaa, että myös $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$, on tullut todistetuksi, että kaikki kolme korkeusjanaa leikkaavat samassa pisteessä. Suorita todistus Mathematican vektorialgebraa käyttäen.

Vihje: Esitä tehtävän vektorit symbolisina kaksi- (tai kolmi-) komponenttisina listoina, so. Mathematican vektoreina. Funktioista `Simplify` ja `FullSimplify` on apua; katso dokumentaatiota.

10. Määrätty integraali voidaan laskea numeerisesti esimerkiksi puolisuunnikassäännöllä

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n).$$

Tässä integroimisväli on jaettu n yhtä suureen osaväliin ja luvut y_k tarkoittavat funktion arvoja jakopisteissä. Laske integraali $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ puolisuunnikassäännöllä käyttäen arvoja $n=4,8,12,16,20$. Muodosta jokaisessa tapauksessa ensin kaksi vektoria: toisessa on funktion arvot tarvittavissa jakopisteissä ja toisessa vastaavat painokertoimet.

Vihje: Anna aluksi arvo muuttujalle n ja muodosta vektorit tämän avulla. Miten vektoreiden sisätuloa voidaan laskennassa hyödyntää? Miten tulokset saadaan helpoimmin muilla arvoilla n? Miten nämä suhtautuvat `NIntegrate`-funktion antamaan tulokseen?