Harjoitus 5

1. Määrittele Mathematicalle funktio $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}$. Laske funktion arvo pisteissä $x = -1,\ 0,\ 1$. Piirrä kuvaaja. Mikä funktion raja-arvo origossa? Onko tämä olemassa? Onko funktio jatkuva?

Vihje: Funktion määrittelyssä voidaan tässä tapauksessa käyttää yhtä hyvin merkkiä `=` tai merkkiä `:=`. Raja-arvo voidaan laskea myös funktiolla `Limit`; katso ohjeet dokumentaatiosta ja kokeile.

2. Mathematicassa on kaksi operaattoria, joita voidaan käyttää funktioiden määrittelyssä: joko `=` (eli `Set`) tai `:=` (eli `SetDelayed`). Yritä selvittää näiden ero määrittelemällä kaksi funktiota seuraavasti:

```
f[x_,n_]= Expand[x^n]
g[x_,n_]:= Expand[x^n]
```

Laske tämän jälkeen `f[a+b,5]` ja `g[a+b,5]`.

Vihje: Delay = viivästää. Katso myös Mathematican dokumentaatiota. Huomaa, että `Expand` ei kehitä (ei voi kehittää) lauseketta, jonka eksponentti on symboli: Kokeile `g[a+b,n]`.

3. Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Laske taulukko sen arvoista välillä $[0, 5]$ askelena 0.1. Piirrä funktion derivaatan kuvaaja. Muodosta integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Laske funktion integraali yli reaaliakselin. Katso, mitä antaa komento `?f`.

Vihje: Funktio voidaan määritellä kahdella tavalla: antamalla muotoa `f[x_]:=`... oleva määrittely tai käyttämällä funktiota `Function`. Kokeile molempia. Taulukko muodostetaan funktiolla `Table`, derivaatta saadaan esimerkiksi kirjoittamalla `f'[x]`. Integroinnissa tarvittava äärettömyys on `Infinity`; se voidaan myös valita paletista.

4. Määrittele Mathematicalle funktio, jonka kuvaaja välillä $[0, \frac{1}{2}]$ yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, 2)$ sekä välillä $[\frac{1}{2}, 1]$ pisteet $(\frac{1}{2}, 2)$ ja $(1, 0)$. Muualla funktio on $= 0$. Piirrä funktion kuvaaja.

Vihje: Funktion paloittaisessa määrittelyssä käytetään symbolia `/;` rajoittamaan määrittelyaluetta, esimerkiksi `f[x_/;x > -1 && x < 1]:=`... . Vaihtoehtona on käyttää funktiota `Piecewise`.

5. Osoita, että polynomit $x^2 + x$ ja $x^2 + 1$ toteuttavat differentiaaliyhtälön $(x^2 - 2x - 1)y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$.

Vihje: Talleta differentiaaliyhtälö Mathematican muistiin siten, että funktion y argumentit ovat paikoillaan: `y''[x]` jne. Määrittele vuorollaan kumpikin polynomi Mathematican funktioksi (`p[x_]:= ...`) ja sijoita tämä yhtälöön: (`yhtalo/.y->p`). Sievennä tarvittaessa.

6. Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ määritellään ehdoilla

$$\begin{aligned} f(n) &= n - 5, \quad \text{kun } n > 10, \\ f(n) &= f(f(n+6)), \quad \text{kun } 1 \leq n \leq 10. \end{aligned}$$

Tutki, mitä arvoja funktio saa.

Vihje: Funktion arvot voidaan laskea taulukkoon `Table`-funktiolla. Miten laskisit käsin arvon $f(1)$?

7. Mathematicalle voidaan määritellä myös monimutkaisempia funktioita funktioidenmäärittelyfunktion `Function` avulla. Määrittele funktio f asettamalla

```
f = Function[x,FactorInteger[x][[1,1]]]
```

ja tutki, mitä se laskee, kun argumenttina on luonnollinen luku.

Vihje: Tutki erikseen, mitä `FactorInteger` antaa. Indeksimerkintä `[[1,1]]` poimii sen tulostuksesta osan.

8. Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| \, dt.$$

Piirrä tämän määritelmän perusteella funktion ja sen derivaatan kuvaajat.

Vihje: Itseisarvofunktio (`Abs`) integraalin sisällä saattaa aiheuttaa ongelmia. Kokeile itseisarvojen käyttöä, mutta määrittele funktio myös paloittain itseisarvolausekkeen merkkien mukaan kolmessa osassa. Tutki, osaako Mathematica derivoida määrittelemiäsi funktioita.

9. Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ja laske sen arvot pisteissä $x = \pi/2$, $x = 1$ ja $x = 0$. Määrittele tämän jälkeen funktio origossa siten, että siitä tulee jatkuva. Laske uudelleen sen arvo origossa. Piirrä funktion kuvaaja ja kokeile, miten Mathematica tulkitsee syötteen `f'[x]`. Mitä on `f'[0]`? Katso, mitä antaa komento `?f`.

Vihje: Funktio voidaan määritellä kahdella tavalla: antamalla muotoa `f[x_]:=`... oleva määrittely tai käyttämällä funktiota `Function`. Edellistä tapaa käytettäessä voidaan lisäksi määritellä erikseen arvo yksittäisissä pisteissä: `f[0]=`... .

10. Jos g on funktion f käänteisfunktio, on kaikilla arvoilla x voimassa $f(g(x)) = x$. Derivoi tätä yhtälöä kahdesti ja ratkaise tuloksista lausekkeet funktion g ensimmäiselle ja toiselle derivaatalle lausuttuina funktion f derivaattojen ja funktion g arvon $g(x)$ avulla.

Vihje: Derivointi voidaan suoran kohdistaa yhtälöön: `D[f[g[x]]==x,x]`. Tulokset: $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, $g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))^3}$. Saatko samat tulokset laskemalla käsin?