Harjoitus 6

1. Kahden paikkakunnan välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna voidaan laskea kaavasta

$$d = R \arccos(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

missä ϑ_1 ja φ_1 tarkoittavat ensimmäisen, ϑ_2 ja φ_2 vastaavasti toisen paikan leveys- ja pituusatetta. $R = 6370$ km on maapallon säde. Muodosta funktio, jolla voidaan laskea kahden paikkakunnan etäisyys antamalla argumenteiksi paikkojen koordinaatit. Laske a) Helsingin ja Tokion, b) Reykjavikin ja Sydneyn välinen etäisyys, kun paikkakuntien koordinaatit ovat seuraavat:

	leveys		pituus	
Helsinki	60° 08'	N	25° 00'	E
Tokio	35° 40'	N	139° 45'	E
Reykjavik	64° 09'	N	21° 58'	W
Sydney	33° 55'	S	151° 10'	E

Vihje: Muodosta funktio siten, että argumentit annetaan asteissa. Arkuskosini on `ArcCos`. Aste on `Degree`; katso tarkemmat tiedot dokumentaatiosta.

2. Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g?

Vihje: Tutki funktioita `NormalDistribution` ja `CDF` (= *cumulative distribution function* = kertymäfunktio), joiden avulla voidaan laskea mihin tahansa normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet.

3. Yhtälöt

$$x = \cos u(a + b\cos v),\ \ y = \sin u(a + b\cos v),\ \ z = b\sin v$$

esittävät erästä pintaa, *ymyrärengasta* eli *torusta* parametrimuodossa. Etsi torukselle muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö eliminoimalla eo. yhtälöistä parametrit u ja v.

Vihje: Eliminointi voidaan tehdä funktiolla `Eliminate`; ks. käyttöohjeet Mathematican dokumentaatiosta. Se toimii kuitenkin parhaiten polynomeihin sovellettuna ja trigonometristen funktioiden tapauksessa ei kovin yksinkertaisiin lausekkeisiin päästä. Vaikeudet voidaan välttää seuraavasti: Eliminoitaviksi muuttujiksi otetaan parametrien u ja v sijasta niiden sinit ja kosinit, ts. tehdään eo. yhtälöihin sijoitus `Sin[u]->u1, Cos[u]->u2, Sin[v]->v1, Cos[v]->v2`. Uusien muuttujien välillä ovat voimassa yhtälöt `u1^2 + u2^2 == 1` ja `v1^2 + v2^2 == 1`, jolloin on kaikkiaan viisi yhtälöä, joista on eliminoitava neljä muuttujaa.

4. Ratkaise kompleksinen yhtälö $z^3 - iz^2 + 2iz + (8 - 4i) = 0$.

Vihje: Imaginaariyksikkö on `I`. Se voidaan myös valita paletista, jolloin symboli on hieman erinäköinen.

5. Ratkaise yhtälö $z^7 + 1 = 0$. Esitä juuret muodossa $z = x + iy$ ja tutki, miten kaukana origosta juuret sijaitsevat kompleksitasossa. Mitkä ovat juurten napakulmat?

Vihje: Sievennä juurten lausekkeet `ComplexExpand`-funktiolla. Kompleksiluvun itseisarvo saadaan funktiolla `Abs`, napakulmaan voidaan käyttää funktiota `Arg` (vaikka tulos kyllä näkyy muutenkin).

6. Puutarhuri viljelee tomaatteja, joiden muoto määräytyy kardioidin $r = a(1 + \cos\varphi)$ pyörähtämisestä x-akselin ympäri. Piirrä kardioidi. Laske tomaatin tilavuus. Tuntuuko saamasi tilavuus uskottavalta? Anna vakiolle a jokin lukuarvo ja laske vastaava tilavuuden likiarvo. Piirrä kuvio tomaatista.

Vihje: Valitse kardioidin parametrisoinnissa napakulma φ parametriksi, lausu x ja y tämän avulla ja käytä funktiota `ParametricPlot`. Vaihtoehtona on käyttää funktiota `PolarPlot`. Tomaattipinnan parametrisoinnissa ota parametreiksi napakulma φ ja pyörähdyskulma x-akselin ympäri. Piirtäminen tapahtuu funktiolla `ParametricPlot3D`. Tilavuus saadaan periaatteessa integraalista $\int y^2\,dx$, johon on tehtävä sellaiset sijoitukset, että muuttujaksi saadaan napakulma φ.

7. Etsi yleinen ratkaisu Airyn differentiaaliyhtälölle $y'' - xy = 0$. Mitä ratkaisussa esiintyvät funktiot ovat?

Vihje: Käytä komentoa `DSolve`. Ratkaisu ei ole lausuttavissa tavallisten alkeisfunktioiden avulla, mutta kylläkin Mathematican tuntemien funktioiden avulla.

8. Laske summan $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$ likiarvo yhä isommilla arvoilla n ja tutki, miten summan käänteisarvo lähestyy Neperin lukua e.

Vihje: Tarvittavia funktioita: `Sum`, `N`. Neperin luku on `E`; se voidaan valita myös paletista, jolloin symboli näyttää hieman erikoiselta pikku e:ltä. Kertoma ilmaistaan yksinkertaisesti huutomerkillä. Tulokset voi kerätä taulukoksi `Table`-funktiolla.

9. Kehitä funktio $f(x) = \sqrt{9x^2 - 3x + 5}$ Taylorin sarjaksi pisteissä $x = 0$, $x = 2$ ja $x = 5$. Piirrä Taylorin polynomien kuvaajat astelukuun 10 saakka ja vertaa niitä funktion kuvaajaan. Miten laajassa alueessa Taylorin sarja näyttäisi suppenevan?

Vihje: Sarja muodostetaan komennolla `Series`, jolle on myös ilmoitettava, montako termiä alusta lähtien halutaan. Tuloksessa on muotoa `O[x^n]` oleva jäännöstermi, joka on pudotettava pois, jotta osasumman kuvaaja saadaan piirretyksi. Tämä tehdään komennolla `Normal`.

10. Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

Vihje: Sarjan summa lasketaan funktiolla `Sum`. Suppenemisalueen tarkastelussa voidaan käyttää funktiota `Reduce` reaalilukualueella (`Reals`).