Peruskäsitteet

1. Mitkä ovat seuraavien funktiota $y = y(x)$ koskevien differentiaaliyhtälöiden kertaluvut? Ovatko yhtälöt normaalimuotoisia?

a) $xy'' + 2y' \sin x + y = e^x$

b) $y' + \sin(x + y) = 0$

c) $y''' = xy''y'y$

d) $y'(y(x)) = y(x)$

Vastaus:

a) 2, ei

b) 1, on

c) 3, on

d) 1, ei

2. Saata differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y' - z' = y \\ 2y' - z' = z \end{cases}$$

normaalimuotoon.

Vastaus:

$y' = z - y,\ z' = z - 2y$

3. Osoita, että $y = \dfrac{x}{Cx+1}$ on differentiaaliyhtälön $x^2y' = y^2$ yleinen ratkaisu. Määritä yksittäisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon a) $y(1) = 1$, b) $y(2) = 1$. Mitä voidaan sanoa alkuehdoista c) $y(0) = 0$ ja d) $y(0) = 1$? Piirrä ratkaisukäyräparvi.

Vastaus:

a) $y = x$; b) $y = 2x/(x+2)$; c) kaikki ratkaisut toteuttavat; d) mikään ratkaisu ei toteuta.

4. Osoita, että $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ on differentiaaliyhtälön $y'' + 4y' + 5y = 0$ ratkaisu. Määritä ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon a) $y(0) = y'(0) = 1$, b) $y(0) = y'(0) = 0$.

Vastaus:

a) $y = e^{-2x}(3\sin x + \cos x)$; b) $y = 0$

5. Osoita, että $y = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x + C_1e^x + C_2e^{6x}$ on differentiaaliyhtälön $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ yleinen ratkaisu. Laske tehtävä sekä käsin että laskentaohjelmaa käyttäen.

6. Osoita, että $y = (1 + \ln|x|)x$ on differentiaaliyhtälön $x^2y'' - xy' + y = 0$ yksittäisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Laske tehtävä sekä käsin että laskentaohjelmaa käyttäen. Missä alueessa yksittäisratkaisu on määritelty?

Vastaus:

$x > 0$

7. Osoita, että differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y' - z' = y \\ 2y' - z' = z \end{cases}$$

yleinen ratkaisu on $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $z = (C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x$. Laske tehtävä sekä käsin että laskentaohjelmaa käyttäen.

8. Differentiaaliyhtälöllä $y' = y$ on ratkaisuna $y = e^x$. Osoita, että sen jokainen muu ratkaisu poikkeaa tästä vain kerrannaisella vakiolla. Sijoita tätä varten yrite $y = u(x)e^x$ differentiaaliyhtälöön ja johda ehto funktiolle u.

9. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y''(x) = f(y'(x))$. a) Osoita laskentaohjelmaa käyttäen, että käyrä, jonka parametriesitys on

$$x = \int \frac{dt}{f(t)} + C_1, \quad y = \int \frac{t\,dt}{f(t)} + C_2,$$

on tämän integraalikäyrä. b) Millä ehdolla differentiaaliyhtälön eräänä ratkaisuna on suora $y = ax + b$?

10. Muodosta suuntakenttä differentiaaliyhtälölle $(x^2 - y^2)y' = 2xy$ ja päättele tämän perusteella, millaisia ratkaisukäyrät ovat.

11. Kirjoita differentiaaliyhtälö

$$3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0$$

muotoon $y' = f(x,y)$, piirrä suuntakenttä ja tutki yhtälön ratkaisukäyriä tämän avulla.

12. Muodosta suuntakenttä differentiaaliyhtälölle $y' = x + y$. Määritä niiden käyrien (isokliinien) yhtälöt, joilla suuntaelementtien kaltevuus on vakio p.

Vastaus:

$y = -x + p$

13. Määritä differentiaaliyhtälön $x^2y' = y + 1$ isokliinit. Piirrä suuntakenttä.

Vastaus:

$y = px^2 - 1$

14. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat f_x ja f_y jatkuvia. Osoita, että jos yhtälön $y' = f(x,y)$ ratkaisukäyrällä on käännepiste, niin se sijaitsee käyrällä

$$f_x(x,y) + f_y(x,y)\,f(x,y) = 0.$$

Osoita edelleen, että tämän käyrän pisteissä ratkaisukäyrä ja isokliini sivuavat toisiaan. Tarkastele esimerkkinä yhtälöä $y' = x^2 - y^2$ ja määritä tälle em. käyrä sekä isokliinit. Piirrä kuvio.

Vastaus:

$y(x^2 - y^2) = x$, $x^2 - y^2 = p$

15. Johda sen käyräparven differentiaaliyhtälö, johon kuuluvat kaikki xy-tason R-säteiset ympyrät. (Parvella on siis kaksi parametria: ympyrän keskipisteen koordinaatit. R on vakio.) Mitä saatu yhtälö ilmaisee parven käyrien kaarevuussäteistä?

Vastaus:

$R^2 y''^2 = (1 + y'^2)^3$

16. Etsi käyräparven $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$ differentiaaliyhtälö, kun parametreina ovat C_1, C_2 ja C_3.

Vastaus:

$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

17. Johda sen käyräparven differentiaaliyhtälö, johon kuuluvat kaikki x-akselia origossa sivuavat ympyrät.

Vastaus:

$(x^2 - y^2)y' = 2xy$

18. Tason toisen asteen käyrän yhtälön yleinen muoto on $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$. Muodosta kaikkien tällaisten käyrien differentiaaliyhtälö.

Vastaus:

$9(y'')^2 y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40(y''')^3 = 0$

19. Palauta differentiaaliyhtälö $yy'' + 2y'^2 = 0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi. Onko ryhmä autonominen? Etsi yhtälön yleinen ratkaisu. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia sekä muuttujan x funktiona että faasitasossa. Määritä faasitasokäyrien yhtälöt.

Vastaus:

$y = \sqrt[3]{C_1 x + C_2}$; $z = C/y^2$

20. Muodosta differentiaaliyhtälöä $(1-y)y'' + 2y'^2 = 0$ vastaava normaaliryhmä ja tutki, onko se autonominen. Etsi reunaehtojen $y(0) = 0$, $y(-1) = -1$ määräämä ratkaisu ja piirrä sen kuvaaja sekä muuttujan x funktiona että faasitasossa.

Vastaus:

$y = x/(x+2)$

21. Totea yhtälö $2y'' = 3y^2$ autonomiseksi ja piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia faasitasoon. Etsi kokeilemalla ratkaisukäyrä, jolla on asymptoottina x-akseli. Miten tämä ilmenee faasitasokuvassa? Etsi kyseisen ratkaisun lauseke.

Vastaus:

$y = 4/(x+C)^2$

22. Olkoot x ja y muuttujan t funktioita, joille pätee

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x \end{cases}.$$

Millaisia ovat ratkaisukäyrät faasitasossa? Johda näiden yhtälöt.

Vastaus:

$2x^2 + y^2 = C$

23. Tutki piirtämällä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - 2x, \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

ratkaisuja faasitasossa. Mitä näistä voidaan päätellä pelkän kuvion perusteella? Entä jos kuvioon yhdistetään tieto vakiokertoimisen yhtälön ratkaisun muodosta?

24. Johda yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = 3y - x \\ y' = y + x \end{cases}$$

ratkaisujen faasitasoesityksen yhtälöt.

Vastaus:

$x^2 + 2xy - 3y^2 = C$

Yhtälöt ja ratkaisut yleensä

25. Olkoon $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jatkuva kahden muuttujan funktio. Näytä, että differentiaaliyhtälön $y'=yf(x,y)$ ratkaisukäyrät joko sivuavat x-akselia tai eivät kosketa sitä lainkaan.

26. Tutki, missä sijaitsevat differentiaaliyhtälön $y'=x+|y|$ ratkaisukäyrien minimipisteet. Piirrä kuvio ratkaisukäyristä.

27. Palauta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $yy''+xy'=0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi $Y'=F(x,Y)$. Millainen vektoriarvoinen funktio F on?

Vastaus:

$F(x,(y_1,y_2))=(y_2,\ -xy_2/y_1)$

28. Kappaleen (planeetan) liikettä keskeisvoimakentässä hallitsee Newtonin lakien mukainen differentiaaliyhtälö

$$\mathbf{r}''=-a\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

missä pilkut tarkoittavat derivaattoja ajan suhteen, $\mathbf{r}$ on paikkavektori, $r=|\mathbf{r}|$ tämän pituus ja a vakio. Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä on tasoliike, jolloin siis $\mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}$. Hajota differentiaaliyhtälö komponenttifunktioita $x(t)$ ja $y(t)$ koskevaksi kahden yhtälön ryhmäksi ja palauta tämä neljän yhtälön ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ottamalla nopeuskomponentit uusiksi tuntemattomiksi funktioiksi.

Vastaus:

$x'=u$, $y'=v$, $u'=-ax/(x^2+y^2)^{3/2}$, $v'=-ay/(x^2+y^2)^{3/2}$, missä u ja v ovat nopeuden komponentit.

29. Kaksi yksikön suuruista massaa on kiinteästi sidottu pisteisiin $(-1,0)$ ja $(1,0)$. Näiden aiheuttamassa gravitaatiokentässä liikkuu kolmas massa. Kirjoita Newtonin lakien mukainen liikeyhtälö ja muodosta vastaava normaaliryhmä. Oletetaan, että kyseessä on tasoliike. Gravitaatiovakiolle käytetään arvoa 1. Tutki numeerisesti, millaisia ratakäyriä malli antaa.

Vastaus:

$x'=u$, $y'=v$, $u'=-\frac{x-1}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}-\frac{x+1}{[(x+1)^2+y^2]^{3/2}}$, $v'=-\frac{y}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}-\frac{y}{[(x+1)^2+y^2]^{3/2}}$

30. Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ tuntemattomat funktiot, $m\in\mathbb{R}$. Muodosta differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} x''+2m^2y=0\\ y''-2m^2x=0\end{cases}.$$

vastaava normaaliryhmä. Tutki piirtämällä ratkaisukäyriä xy-tasossa. Miten nämä käyttäytyvät, kun $t\to\infty$? Onko yhtälöryhmällä rajoitetuja ratkaisuja? Totea, että yhtälön ratkaisu on $x=e^{mt}(C_1\sin mt+C_2\cos mt)+e^{-mt}(C_3\sin mt+C_4\cos mt)$, $y=e^{mt}(-C_1\cos mt+C_2\sin mt)+e^{-mt}(C_3\cos mt-C_4\sin mt)$, jos $m\neq 0$, ja $x=C_1+C_2t$, $y=C_3+C_4t$, jos $m=0$.

31. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ riittävän monta kertaa derivoituva kahden muuttujan funktio. Laske alkuarvoprobleeman $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisun $y(x)$ kolmannen asteen Taylorin polynomi kehityskeskuksena x_0. Laske myös neljännen asteen Taylorin polynomi laskentaohjelman avulla.

Vastaus:

$T_3(x,x_0) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(f_x + f_y f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}(f_{xx} + f_{xy} f + f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^3$

32. Laske alkuarvoprobleeman $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$ ratkaisun $y(x)$ viidennen asteen origokeskinen Taylorin polynomi yhtälöä ratkaisematta. Muodosta tarvittavat funktion y derivaatat derivoimalla differentiaaliyhtälöä.

Vastaus:

$T_5(x,0) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{4}{5}x^5$

33. Laske alkuarvoprobleeman $y'' = yy' - x^2$, $y(0) = y'(0) = 1$ ratkaisun viidennen asteen Maclaurinin polynomi yhtälöä ratkaisematta. Muodosta tarvittavat funktion y derivaatat derivoimalla differentiaaliyhtälöä.

Vastaus:

$T_4(x,0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{7}{60}x^5$

34. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio ja olkoon y differentiaaliyhtälön $y' = f(x,y)$ alkuehdon $y(x_0) = y_0$ toteuttava ratkaisu. Johda lauseke derivaatalle $y''(x_0)$.

Vastaus:

$y''(x_0) = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0) f(x_0,y_0)$

35. Määritä alkuarvoprobleeman $xy' = x + y$, $y(1) = 1$ ratkaisukäyrän kaarevuus alkuehtopisteessä.

Vastaus:

$1/5^{3/2}$

36. Tutki, millaisia ratkaisuja on differentiaaliyhtälöllä $y'(y(x)) = y(x)$.

Vastaus:

$y = 0, y = x^2/2 + C$

37. Ratkaise integraaliyhtälö

$$\int_1^x \frac{t^2 + y(t)^2 + ty(t)}{t^2}\, dt = y(x)$$

muodostamalla ensin puolittain derivoimalla differentiaaliyhtälö.

Vastaus:

$y = x \tan \ln x$, $x \in \left]e^{-\pi/2}, e^{\pi/2}\right[$

38. Ratkaise differentiaaliyhtälö $yy''' = y'y''$ sijoituksella $u = y'/y$.

Vastaus:

$y = C_2 \sinh(C_1 x) + C_3 \cosh(C_1 x)$, $y = C_2 \sin(C_1 x) + C_3 \cos(C_1 x)$, $y = C_2 + C_3 x$

39. Olkoon funktio $P(x)$ derivoituva. Tee lineaariseen differentiaaliyhtälöön $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ sijoitus

$$y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

ja saata se muotoon $u'' + I(x)u = 0$. Mikä on funktion $I(x)$ lauseke?

Vastaus:

$I(x) = Q(x) - \frac{1}{4}P(x)^2 - \frac{1}{2}P'(x)$

40. Olkoon funktio $P(x)$ jatkuva. Kerro lineaarinen differentiaaliyhtälö $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ funktiolla

$$p(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

ja saata tulos muotoon

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0.$$

Millainen funktio on $q(x)$?

Vastaus:

$q(x) = Q(x)p(x)$

41. Funktio y olkoon jatkuva ja toteuttakoon integraaliyhtälön

$$2\int_0^x ty(t)\,dt = x^2 + y(x).$$

Määritä y käsinlaskulla. Tutki, miten laskentaohjelmaa voidaan hyödyntää tehtävän ratkaisemisessa.

Vastaus:

$y = 1 - e^{x^2}$

42. Palauta *Bernoulli'n differentiaaliyhtälö* $y' = A(x)y + B(x)y^p$ lineaariseksi ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi sijoituksella $z = y^{1-p}$. Ratkaise tällä tavoin seuraavat yhtälöt:

a) $xy' + y = x^3y^2$

b) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

c) $3y' + y = (1-2x)y^4$

d) $y' + \frac{2y}{1-x} = 4(x^2 - x)\sqrt{y}$

Vastaus:

a) $y = 1/(Cx - x^3/2)$

b) $y = 1/(Ce^x - \sin x)$

c) $y = 1/\sqrt[3]{Ce^x - 2x - 1}$

d) $y = (x^2 + C)^2(x-1)^2$

43. *Riccati'n differentiaaliyhtälö* on muotoa $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ ja *Bernoulli'n differentiaaliyhtälö* muotoa $y' = A(x)y + B(x)y^p$. Olkoon $y_0(x)$ Riccati'n yhtälön yksittäisratkaisu. Muunna Riccati'n yhtälö Bernoulli'n yhtälöksi sijoituksella $y(x) = y_0(x) + z(x)$. Muunna tällä tavoin seuraavat Riccati'n yhtälöt, kun annettuna on yksittäisratkaisun periaatteellinen muoto. Ratkaise saamasi Bernoulli'n yhtälö (tuntemattomana funktiona $z(x)$) sijoituksella $u(x) = z(x)^{1-p}$. Mieti, miten laskentaohjelmaa voidaan laskussa hyödyntää. Onnistuuko alkuperäisen yhtälön ratkaiseminen suoraan?

a) $y' = 1 + x + x^2 - (2x+1)y + y^2$, $y_0(x) = ax + b$

b) $y' = y^2 - x^2y - (x-1)^2$, $y_0(x) = ax^2 + bx + c$

c) $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$, $y_0(x) = \frac{a}{x}$

Vastaus:

a) $y = (Cxe^x - x - 1)/(Ce^x - 1)$

b) $y = x^2 + 1 - e^{x^3/3+2x} / \left(C + \int_0^x e^{t^3/3+2t}\, dt\right)$

c) $y = (C + 4x^3)/(Cx + x^4)$

44. Muunna differentiaaliyhtälö $x^2y''' + 2(x^2 - x)y'' + (x^2 - 2x + 2)y' = x^3$ ottamalla uudeksi tuntemattomaksi funktioksi $u(x) = y'(x)/x$. Totea, että tällöin syntyy lineaarinen vakiokertoiminen yhtälö ja ratkaise se. Ratkaise tämän avulla alkuperäinen yhtälö.

Vastaus:

$y = e^{-x}[C_1x^2 + C_2(x+1)] + C_3 + x^2/2$

45. Etsi kaikilla vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla integro-differentiaaliyhtälön

$$x^2y'(x) = 2\int_a^x y(t)\, dt$$

ratkaisu johtamalla ensin differentiaaliyhtälö funktiolle y.

Vastaus:

Jos $a \neq 0$, niin $y = C(2x/a^3 + 1/x^2)$, missä x on samanmerkkinen kuin a; jos $a = 0$, niin $y = Cx$.

46. Määritä differentiaaliyhtälön $y'^3 = y$ yleinen ratkaisu. Piirrä ratkaisukäyriä. Onko yhtälöllä erikoisratkaisuja? Onko olemassa alkuehtoa, joka ei määrää ratkaisua yksikäsitteisesti?

Vastaus:

$y = [\frac{2}{3}(x+C)]^{3/2}$; erikoisratkaisu $y = 0$; on olemassa, esimerkiksi $y(0) = 0$.

47. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'^2 = 4y$. Onko yhtälöllä erikoisratkaisuja? Onko olemassa ehdot $y(-1) = 1$, $y(2) = 1$ toteuttavaa ratkaisua?

48. Onko alkuarvoprobleemalla a) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$, b) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$ olemassa yksikäsitteinen ratkaisu? Piirrä myönteisessä tapauksessa ratkaisufunktion kuvaaja origon ympäristössä jotakin menettelyä käyttäen.

49. Alkuarvoprobleeman $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisun olemassaolotodistuksessa käytetään Picardin – Lindelöfin menettelyä:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,dx, \quad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Etsi tätä käyttäen approksimaatioita alkuarvoprobleeman $y' = xy$, $y(0) = 1$ ratkaisulle. Valitse aloitusfunktioksi vakiofunktio $y_0(x) = 1$. Vertaa tulosta tarkan ratkaisun Maclaurinin polynomiin.

Vastaus:

$y_6(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46080}$

50. Alkuarvoprobleeman $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisun olemassaolotodistuksessa käytetään Picardin – Lindelöfin menettelyä:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,dx, \quad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Tarkastellaan alkuarvoprobleemaa $y' = f(x,y) = 2x + 5y$, $y(0) = 0$. Osoita, että funktio f täyttää tasaisen Lipschitzin ehdon ja laske probleeman ratkaisulle Picardin – Lindelöfin menetelmän mukaiset approksimaatiot $y_k(x)$, $k = 1,2,3,4$, kun valitaan $y_0(x) = 0$.

Vastaus:

$y_4(x) = x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + \frac{25}{12}x^5$

51. Alkuarvoprobleeman $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisun olemassaolotodistuksessa käytetään Picardin – Lindelöfin menettelyä:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,dx, \quad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Laske tällä tavoin approksimoivia polynomeja alkuarvoprobleeman $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$ ratkaisulle.

Vastaus:

$y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3, y_2(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7$, etc.

52. Alkuarvoprobleeman $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ ratkaisun olemassaolotodistuksessa käytetään Picardin – Lindelöfin menettelyä:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Approksimoi tällä tavoin alkuarvoprobleeman $y'' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ratkaisua. Differentiaaliyhtälö on ensin kirjoitettava normaaliryhmän muotoon $Y' = F(x,Y)$, missä Y ja F ovat vektoriarvoisia funktioita. Laske funktiojonon alkupään termejä ja vertaa niiden antamaa approksimaatiota alkuarvoprobleeman tarkkaan ratkaisuun (joka on lausuttavissa Airyn funktioiden avulla).

Vastaus:

$y = x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} - \frac{x^{10}}{45360} + \frac{x^{13}}{7076160} - \frac{x^{16}}{1698278400} + \ldots$

Ratkaiseminen ohjelmistoilla

53. Tutki seuraavien differentiaaliyhtälöiden tai alkuarvoprobleemoiden ratkaisemista symbolisen tietokoneohjelman avulla:

a) $y' = xy$

b) $y' = xy$, $y(1) = 2$

c) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$

d) $y'' - 4y' + 13y = x^4$

e) $yy'' = y'^2 + yy'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

f) $y'' + xy = 0$

54. Ratkaise yhtälö $y'' = f(y)$ laskentaohjelmalla. Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että tällainen yhtälö aina voidaan ratkaista kahdella integroinnilla?

55. Määritä laskentaohjelmalla *Besselin differentiaaliyhtälön* $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ yleinen ratkaisu. Tässä n on parametri, joka voi saada minkä tahansa reaaliarvon. Kokeile ensin symbolilla n, ja anna sille tämän jälkeen kokonaislukuarvoja ja yksinkertaisia murtolukuarvoja. Ratkaisut ovat muotoa $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Miten funktiot y_1 ja y_2 suhtautuvat toisiinsa parametrin n eri arvoilla? Millaisia ominaisuuksia niillä on? Rajoitu tarkastelemaan arvoja $x > 0$.

56. Osoita laskentaohjelmaa käyttäen, että differentiaaliyhtälön $y' = x - y^2$ yleinen ratkaisu on

$$y = \frac{C\mathrm{Ai}'(x) + D\mathrm{Bi}'(x)}{C\mathrm{Ai}(x) + D\mathrm{Bi}(x)},$$

missä Ai ja Bi ovat *Airyn funktiot*; C ja D ovat vakioita. Huomaa, että integroimisvakioita on oleellisesti yksi: lauseke voidaan supistaa joko C:llä tai D:llä. Piirrä ratkaisukäyriä ja tutki, millaisessa erikoisasemassa ovat arvoja $C = 0$ tai $D = 0$ vastaavat ratkaisut.

57. Ratkaise seuraavat yhtälöryhmät laskentaohjelmalla ja pyri saattamaan vastaus mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Tutki, mitkä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvot ovat poikkeusasemassa, ts. yleisessä tapauksessa saatu ratkaisu ei ole pätevä näillä arvoilla. Tutki myös, toteuttavatko saamasi ratkaisut yhtälöparin.

a) $\begin{cases} x'(t) = ay(t) + 1 \\ y'(t) = 2y(t) + ax(t) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'(t) + a^2 y(t) = \cos at \\ y'(t) + a^2 x(t) = \sin at \end{cases}$

Vastaus:

a) Jos $a \neq 0$, niin $x = C_1 e^{(1+\sqrt{1+a^2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{1+a^2})t} + 2/a^2$,
$y = \frac{C_1}{a}(1+\sqrt{1+a^2})e^{(1+\sqrt{1+a^2})t} + \frac{C_2}{a}(1-\sqrt{1+a^2})e^{(1-\sqrt{1+a^2})t} - 1/a$.
Jos $a = 0$, niin $x = t + C_1$, $y = C_2 e^{2t}$.

b) Jos $a \neq 0$, niin $x = C_1 e^{a^2 t} + C_2 e^{-a^2 t} + \frac{a+1}{a(a^2+1)} \sin at$, $y = -C_1 e^{a^2 t} + C_2 e^{-a^2 t} + \frac{a-1}{a(a^2+1)} \cos at$.
Jos $a = 0$, niin $x = t + C_1$, $y = C_2$.

58. Ratkaise laskentaohjelmalla numeerisesti ja symbolisesti alkuarvotehtävä $y' = y^2 - \cos x$, $y(0) = 1$. Piirrä kummankin ratkaisun kuvaaja ja laske $y(1.5)$. Onko yhtälö ratkaistavissa alkeisfunktioiden avulla?

59. Ratkaise laskentaohjelmalla alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3$$

numeerisesti ja symbolisesti. Piirrä kummassakin tapauksessa saatujen ratkaisukäyrien kuvaajat välillä $[0, 20]$ ja laske ratkaisufunktioiden arvot pisteessä $t = 20$. Millä tarkkuudella numeerinen ja symbolinen tulos on sama?

60. Ratkaise laskentaohjelmalla numeerisesti alkuarvoprobleema $y''' = |y|^3 - y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$ antamalla syötteeksi yhtälö a) ylläolevassa muodossa, b) normaaliryhmänä. Millä välillä ratkaisu on olemassa?

61. Ratkaise laskentaohjelmalla numeerisesti alkuarvoprobleema $x'' + y = \sin t$, $y'' + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Tarkastele ratkaisuja välillä $[0, 30]$. Tutki ratkaisun herkkyyttä alkuarvojen muutoksille käyttämällä hieman poikkeavaa alkuehtoa, esimerkiksi $x(0) = 0$, $x'(0) = 0.9999$, $y(0) = 1.0001$, $y'(0) = 0$. Voidaanko yhtälöryhmä ratkaista tarkasti?

Alkeellinen ratkaiseminen käsin

62. Etsi separoimalla seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut. Piirrä ratkaisukäyriä.

a) $9yy' + 4x = 0$

b) $y' = 1 + y^2$

Vastaus:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C$

b) $y = \tan(x + C)$

63. Ratkaise separoimalla seuraavat alkuarvotehtävät.

a) $y' = -2xy,\ y(0) = 1$

b) $y' = -\dfrac{y}{x-3},\ y(-1) = 1$

c) $y' = \dfrac{2x}{1+2y},\ y(2) = 0$

d) $y' + 5x^4y^2 = 0,\ y(0) = 1$

e) $y' = \dfrac{x}{y},\ y(1) = 3$

Vastaus:

a) $y = e^{-x^2}$

b) $y = -\frac{4}{x-3}$, missä $x < 3$

c) $y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4x^2 - 15})$

d) $y = \frac{1}{x^5+1}$

e) hyperbelin $y^2 - x^2 = 8$ ylempi haara

64. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia. Valitse jokin alkuehto, joka antaa muun kuin vakioratkaisun, ja tutki, missä alueessa vastaava ratkaisu on määritelty. Voidaanko alkuehto antaa missä tahansa pisteessä?

a) $y' = (1 - y)^2$

b) $y' = (1 + y)(y - 1)$

c) $y' = \sqrt{y - 3}$

Vastaus:

a) $y = 1 + C/(1 - Cx)$

b) $y = (1 + Ce^{2x})/(1 - Ce^{2x})$

c) $y = 3 + \frac{1}{4}(x - C)^2$

65. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia. Valitse jokin alkuehto, joka antaa muun kuin vakioratkaisun, ja tutki, missä alueessa vastaava ratkaisu on määritelty. Voidaanko alkuehto antaa missä tahansa pisteessä?

a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{1+y}{1+x}$

c) $y' = \dfrac{1+y^2}{x} = 0$

d) $y' = \dfrac{x^2 y}{1+x^3}$

e) $y' = \dfrac{1-y^2}{1-x^2}$

Vastaus:

a) $y = Cx/(x + C)$

b) $y = -1 + C(x + 1)$

c) $y = \tan\ln(Cx)$

d) $y = C\sqrt[3]{1 + x^3}$

e) $y = (Cx + 1)/(x + C)$

66. Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat. Voidaanko separointia ongelmitta soveltaa?

a) $y'\,\overline{\mathrm{arc}}\tan y = 1,\ y(1) = 1$

b) $y' \sin x = y \ln y,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$

c) $(1 + e^x)yy' = e^x,\ y(1) = 1$

d) $\cos^2 x \cos(\ln y)y' = y,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1$

Vastaus:

a) $x = 1 - \frac{\pi}{4} + y\,\overline{\text{arc}}\tan y - \frac{1}{2}\ln[\frac{1}{2}(1+y^2)]$

b) $y = 1$

c) $y = \left(1 + 2\ln\dfrac{1+e^x}{1+e}\right)^{1/2}$

d) $y = e^{\overline{\text{arc}}\sin(\tan x - 1)}$

67. Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat.

a) $y' = e^{|x|}$, $y(-1) = -1$

b) $y' = \sin|x|$, $y(-\pi) = 0$

Vastaus:

a) $y = e - 1 - e^{-x}$, kun $x \leq 0$ ja $y = e - 3 + e^x$, kun $x \geq 0$

b) $y = 1 + \cos x$, kun $x \leq 0$ ja $y = 3 - \cos x$, kun $x \geq 0$

68. Etsi ne differentiaaliyhtälön $y' = 2x|y-1|$ ratkaisukäyrät, jotka sivuavat x-akselia.

Vastaus:

$y = 1 - e^{-x^2}$

69. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt sopivaa sijoitusta käyttäen. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia. Onko yhtälöillä ratkaisuja, joiden kuvaajat ovat suoria?

a) $(x+y)^2y' + 1 = 0$

b) $y' = (2x+y+3)^2$

c) $y' = \cos(x+y)$

Vastaus:

a) $x + y = \tanh(y + C)$; on

b) $y = -2x - 3 + \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x + C)$; ei

c) $\tan\frac{x+y}{2} = x + C$; on

70. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt ja piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia.

a) $y' = \frac{y}{x-y}$

b) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

c) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

Vastaus:

a) $x = -y\ln(Cy)$

b) $y^2 = 2x^2\ln(Cx)$

c) $y = xe^{Cx+1}$

71. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt. Piirrä ratkaisujen kuvaajia.

a) $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

b) $xyy' = x^2 + y^2$

c) $(2x^2 + y^2)y' = 2xy$

Vastaus:

a) $y = x\tan(\ln x + C)$

b) $y = \pm x\sqrt{C + 2\ln x}$

c) $x^2 = y^2\ln(Cy)$

72. Ratkaise differentiaaliyhtälö $1 + y^2 + xyy' = 0$ sopivalla sijoituksella.

Vastaus:

$y = \pm\sqrt{\dfrac{C}{x^2} - 1}$

73. Ratkaise alkuarvoprobleema $y' = \dfrac{|x| + (x+y)}{|y| - (x-y)}$, $y(2) = 0$.

Vastaus:

$y = 4/x - x$, kun $0 < x \le 2$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{16 - 3x^2} - x)$, kun $2 \le x \le 4/\sqrt{3}$

74. Piirrä differentiaaliyhtälön $xy' = x + y$ suuntakenttä. Etsi yhtälön ratkaisu. Piirrä suuntakenttään alkuehdon $y(1) = 1$ toteuttava ratkaisukäyrä.

75. Osoita, että yhtälön

$$(x + x\cos\frac{y}{x})y' = x + y + y\cos\frac{y}{x}$$

yleinen ratkaisu voidaan esittää parametrimuodossa seuraavasti: $x = Ce^{t+\sin t}$, $y = Cte^{t+\sin t}$. Etsi tämä ratkaisu sopivaa sijoitusta ja separointia käyttäen. Piirrä ratkaisukäyrä, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = \pi/2$.

76. Ratkaise differentiaaliyhtälö $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ sopivalla sijoituksella. Mitä mahdetaan tarkoittaa, kun yhtälöä kutsutaan erään *ympyräparven* differentiaaliyhtälöksi?

77. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikkialla jatkuvasti derivoituva ja $\neq 0$. Etsi yhtälön

$$f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(y' - \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

yleinen integraali.

Vastaus:

$f(y/x) = Cx$

78. Ratkaise alkuarvoprobleema $e^y y' = x + e^y - 1$, $y(0) = a$ sijoituksella $u = x + e^y$. Mikä ehto vakion a on täytettävä, jotta ratkaisufunktio olisi määritelty kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$? Jos a ei täytä tätä ehtoa, funktiolla on singulariteetti jossakin pisteessä. Millaisesta yhtälöstä tämä saadaan? Millä välillä singulariteetti sijaitsee?

Vastaus:

$y = \ln(e^{a+x} - x)$; $a > -1$; $e^{a+x} = x$; $]0,1]$

79. Tutki seuraavien yhtälöiden muuntumista muuttujien vaihdossa $x = t^a$, $y = u^b$. Valitse vakioille a ja b arvot siten, että yhtälöistä tulee tasa-asteisia ja ratkaise ne.

a) $2(x^2 - xy^2)y' + y^3 = 0$

b) $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$

Vastaus:

a) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u^3}{tu^2 - t^3}, y^2 = 2x\ln(Cy)$

b) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2u^3}{tu^2 - t^3}, x^2y^2 + 1 = Cy$

80. Muotoa $y' = f(L_1/L_2)$ oleva differentiaaliyhtälö, missä $L_1 = a_1x + b_1y + c_1$ ja $L_2 = a_2x + b_2y + c_2$, voidaan palauttaa separoituvaan sijoituksella $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, missä (x_0, y_0) on suorien $L_1 = 0$ ja $L_2 = 0$ leikkauspiste. Ratkaise tällä tavoin seuraavat differentiaaliyhtälöt.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$

Vastaus:

a) $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$

b) $2\,\overline{\text{arc}}\tan\dfrac{y+2}{x-3} + \ln|y + 2| = C$

81. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt.

a) $y''^2 = y'$

b) $y'' = 1 - y'^2$

c) $xy'' + (x-1)y' = 0$

d) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

Vastaus:

a) $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$

b) $y = \ln|C_1 e^x - 1/(C_1 e^x)| + C_2$, $y = \pm x + C$

c) $y = C_1 e^{-x}(x+1) + C_2$

d) $y = (C_1 x - C_1^2)e^{x/C_1+1} + C_2$

82. Muodosta seuraavia differentiaaliyhtälöitä vastaavat normaaliryhmät. Ratkaise yhtälöt näiden avulla käsinlaskulla. Ratkaise yhtälöt laskentaohjelmalla lähtemällä alkuperäisestä yhtälöstä ja toisaalta normaaliryhmästä. Tutki, ovatko eri tavoin saadut ratkaisut samoja.

a) $y'' + y'^3 e^y = 0$

b) $y^3 y'' = 1$

c) $y'' = e^y$

d) $yy'' = 1 + y'^2$

e) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$,

f) $(1 + y^2)y'' = y' + y'^3$

Vastaus:

a) $e^y + C_1 y = x + C_2$

b) $C_1 y^2 = (C_1 x + C_2)^2 + 1$

c) $y = \ln(2C_1^2) + C_1 x + C_2 - 2\ln|e^{C_1 x + C_2} - 1|$, $y = \ln(2C_1^2) - 2\ln|\cos(C_1 x + C_2)|$,
$y = 2\ln(\sqrt{2}/|x + C|)$

d) $y = (1/C_1)\cosh(C_1 x + C_2)$

e) $y = C_1/\cos^2(x + C_2)$

f) $C_1 y + (1 + C_1^2)\ln|y - C_1| = x + C_2$

83. Muodosta seuraavia differentiaaliyhtälöitä vastaavat normaaliryhmät. Ratkaise yhtälöt näiden avulla käsinlaskulla. Ratkaise yhtälöt laskentaohjelmalla lähtemällä alkuperäisestä yhtälöstä ja toisaalta normaaliryhmästä. Tutki, ovatko eri tavoin saadut ratkaisut samoja.

a) $y''' = y''^3$

b) $y''' + y''^2 = 0$

c) $y'y''' = 2y''^2$

d) $x^2 y^{(4)} = 2y''$

e) $xy^{(5)} = y^{(4)}$

Vastaus:

a) $y = \pm\frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2 x + C_3$

b) $y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3$

c) $y = C_1 \ln|C_2 x + C_3| + C_3$, $y = C_2 x + C_3$

d) $y = C_1 x^4 + (C_2 + C_3 \ln|x|)x + C_4$

e) $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$

84. Osoita differentiaaliyhtälöt

a) $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2 y + 4y^3)y' = 0$

b) $e^{-y} + (1 - xe^{-y})y' = 0$

c) $2x\cos^2 y + (2y - x^2 \sin 2y)y' = 0$

eksakteiksi ja ratkaise ne. Piirrä suuntakentät ja ratkaisukäyriä.

Vastaus:

a) $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = C$

b) $y + xe^{-y} = C$

c) $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$

85. Totea, että differentiaaliyhtälöllä $(3x^2 - y^2 - 3)y' + 2xy = 0$ on integroiva tekijä y^2. Ratkaise yhtälö ja piirrä sen ratkaisukäyriä.

86. Totea, että differentiaaliyhtälö $x^2 y' - 2xy + 3 = 0$ ei ole eksakti, mutta siitä voidaan saada eksakti kertomalla se muotoa $F(x)$ olevalla integroivalla tekijällä. Ratkaise yhtälö tällä tavalla. Piirrä suuntakenttä ja ratkaisukäyriä.

Vastaus:

$y = Cx^2 + 1/x$

87. Differentiaaliyhtälöllä $(2xy - y^2 - y)dx + (2xy - x^2 - x)dy = 0$ on muotoa $F(x+y)$ oleva integroiva tekijä. Ratkaise yhtälö tämän perusteella. Piirrä suuntakenttä ja ratkaisukäyriä.

Vastaus:

$xy = C(x+y+1)^3$

88. Osoita, että jos differentiaaliyhtälössä

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$(P_y - Q_x)/Q$ on pelkästään muuttujan x funktio, niin yhtälöllä on muotoa $F(x)$ oleva integroiva tekijä, ja jos $(P_y - Q_x)/P$ on pelkästään muuttujan y funktio, niin yhtälöllä on muotoa $F(y)$ oleva integroiva tekijä. (Alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattoja.) Ratkaise tällä menettelyllä seuraavat differentiaaliyhtälöt.

a) $xy^2 + y - xy' = 0$

b) $-2xy + (y^2 + 3a^2 - 3x^2)y' = 0$

c) $1 - x^2y + x^2(y-x)y' = 0$

d) $\cos y + \cos x \cos(x+y)y' = 0$

Vastaus:

a) $y = 2x/(C - x^2)$

b) $(a^2 - x^2)y^3 + \frac{1}{5}y^5 = C$

c) $y^2 - 2xy - 2/x = C$

d) $\tan x \cos y + \sin y = C$

Lineaariyhtälön teoria

89. Onko differentiaaliyhtälö $y'' + x(y' - y'') = y + 1$ a) lineaarinen, b) homogeeninen?

Vastaus:

a) On, b) ei.

90. Olkoot $u(x)$ ja $v(x)$ jatkuvasti derivoituvia funktioita tarkasteluvälillä ja olkoon tällä välillä $u(x) \neq 0$. Etsi ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on $y = Cu(x) + v(x)$. Ratkaise saamasi differentiaaliyhtälö laskentaohjelmalla.

Vastaus:

$u(x)y' - u'(x)y = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$

91. Olkoon $y_1(x) = x^2$ ja $y_2(x) = x|x|$. Osoita, että funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia ja että niiden Wronskin determinantti on $= 0$. Onko mahdollista muodostaa toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuja em. funktiot ovat?

Vastaus:

Ei.

92. Osoita, että eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat differentiaaliyhtälön

$$(x^2+x)y'''+(2-x^2)y''-(2+x)y'=0$$

ratkaisuja. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

Vastaus:

$y=C_1e^x+C_2\ln x+C_3$

93. Osoita, että differentiaaliyhtälöllä

$$x(3+x)y'''+(12-x^2)y''-3(4+x)y'=0$$

on ratkaisuina $y=e^x$ ja $y=1/x^2$. Mikä on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu?

Vastaus:

$y=C_1e^x+C_2/x^2+C_3$

94. Muodosta toisen kertaluvun homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö, jolla on yksityisratkaisuina kahdesti derivoituvat funktiot $u(x)$ ja $v(x)$, joiden Wronskin determinantti on $\neq 0$.

Vastaus:

$(uv'-u'v)y''-(uv''-u''v)y'+(u'v''-u''v')y=0$

95. Lineaarisella homogeenisella toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä on yksityisratkaisuina $u(x)=x$ ja $v(x)=\cos x$. Muodosta yhtälö ja määritä sen ratkaisuista se, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y=x+1$ origossa.

Vastaus:

$(x\sin x+\cos x)y''-(x\cos x)y'+(\cos x)y=0$; $y=x+\cos x$

96. Osoita, että eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat differentiaaliyhtälöä

$$(x^2+x)y'''+(2-x^2)y''-(2+x)y'=2(1-x-x^2)$$

vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisuja. Totea, että epähomogeenisella yhtälöllä on ratkaisuna eräs toisen asteen polynomi. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

Vastaus:

$y=C_1e^x+C_2\ln x+C_3+x^2/2$

97. Differentiaaliyhtälöllä

$$y'+P(x)y=(x+1)^2e^x$$

on ratkaisuna $y=(x^2-1)e^x$. Määritä $P(x)$ ja yhtälön yleinen ratkaisu. Etsi alkuehdon $y(0)=0$ toteuttava yksityisratkaisu. Millä välillä tämä yksityisratkaisu on määritelty? Miten tehtävä voidaan ratkaista laskentaohjelmalla?

Vastaus:

$P(x) = 2/(x^2-1)$, $y = C(x+1)/(x-1)+(x^2-1)e^x$; $C = -1$, $x < 1$

98. Funktiot $u(x)$ ja $v(x)$ ovat yhtälön $y' + a(x)y = 0$ ratkaisuja, funktiot $u(x)+e^x$ ja $v(x)-1$ yhtälön $y' + a(x)y + b(x) = 0$ ratkaisuja. Määritä funktiot $a(x)$ ja $b(x)$ sekä se jälkimmäisen yhtälön ratkaisu, jonka kuvaaja kulkee origon kautta.

Vastaus:

$a(x) = b(x) = -\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $y = \frac{1}{2}(e^x-1)$

99. Tutki, millaisia kohdassa $x = 0$ annettuja alkuehtoja arvoa $n = 1$ vastaavaan *Besselin differentiaaliyhtälöön* $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ voidaan liittää. Mikä on tilanne, jos ehdot annetaan kohdassa $x = 1$?

Lineaariyhtälön ratkaiseminen

100. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt sekä käsinlaskulla että laskentaohjelmalla. Vertaa tuloksia.

a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

b) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

c) $y'\sin x - y = 1 - \cos x$

Vastaus:

a) $y = (x^2+C)e^{-x^2}$

b) $y = (x+C)(1+x^2)$

c) $y = (x+C)\tan(x/2)$

101. Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat a) käsinlaskulla, b) laskentaohjelmalla symbolisesti, c) laskentaohjelmalla numeerisesti. Vertaa tuloksia. Piirrä kuvaajat.

a) $xy' + 2y = x^3$, $y(1) = 1$

b) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $y(0) = 1$

c) $y' + |x - |x||y = x$, $y(0) = 0$

Vastaus:

a) $y = \frac{1}{5}(4/x^2 + x^3)$

b) $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$

c) $y = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)$, kun $x \leq 0$, $y = \frac{1}{2}x^2$, kun $x \geq 0$

102. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y' + y\cot x = e^{\cos x}, \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

laskentaohjelmalla sekä symbolisesti että numeerisesti. Piirrä ratkaisukäyrä. Millä välillä tämä on määritelty?

Vastaus:
$\dfrac{2 - e^{\cos x}}{\sin x}$, $0 < x < \pi$

103. Olkoon funktio $r(x)$ jatkuva ja olkoon $y(x)$ alkuarvoprobleeman $y' + 3x^2y = r(x)$, $y(0) = 0$ ratkaisu. Mitä arvoja $y(-1)$ ja $y(1)$ voivat saada, kun $r(x) < x^2$?

Vastaus:

$y(-1) > \frac{1-e}{3}$, $y(1) < \frac{e-1}{3e}$

104. Määritä differentiaaliyhtälön $y' = |y - x|$ yleinen ratkaisu. Piirrä suuntakenttä ja ratkaisukäyriä. Määritä alkuehdon $y(1) = 2$ toteuttava yksittäisratkaisu.

Vastaus:

Alueessa $y \geq x + 1$ ratkaisu on $y = Ce^x + x + 1$, missä $C \geq 0$;
alueessa $x - 1 < y < x + 1$ on $y = -e^x/C + x + 1$, jos $x \leq \ln C$, ja $y = Ce^{-x} + x - 1$, jos $x \geq \ln C$; tässä on $C > 0$;
alueessa $y \leq x - 1$ on $y = Ce^{-x} + x - 1$, missä $C \leq 0$;
$y = x + 1$.

105. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt, kun tiedetään että yhtenä yksityisratkaisuna on polynomi. Kokeile myös ratkaisemista laskentaohjelmalla ja vertaa tuloksia. Tutki, onko mahdollista antaa alkuehto origossa.

a) $xy'' - (x + 3)y' + y = 0$

b) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$

c) $(x^2 - 2x - 1)y'' - 2(x - 1)y' + 2y = 0$

Vastaus:

a) $y = C_1(x+3) + C_2e^x(x^2 - 4x + 6)$

b) $y = C_1x + C_2 \ln x$

c) $y = C_1(x^2+1) + C_2(x^2+x)$

106. Osoita, että differentiaaliyhtälöllä $y'' + (\tan x - 2\cot x)y' + 2(\cot^2 x)y = 0$ on ratkaisuna $\sin x$ ja etsi yhtälön yleinen ratkaisu.

Vastaus:

$y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$

107. Osoita, että differentiaaliyhtälöllä $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$ on muotoa e^{kx} oleva ratkaisu ja etsi yhtälön yleinen ratkaisu.

Vastaus:

$y = e^x[C_1 + C_2(x^2 - 4x)]$

108. Totea, että seuraavissa differentiaaliyhtälöissä kerroinfunktioiden summa on $= 1$ ja käytä tätä tietoa yhden yksityisratkaisun löytämiseen. Etsi yhtälöiden yleiset ratkaisut käsinlaskulla. Kokeile myös laskentaohjelman käyttöä.

a) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

b) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + (2 - 2x)y = 0$

c) $y'' - 2\left(1 + x + \frac{1}{2x}\right)y' + \left(1 + 2x + \frac{1}{x}\right)y = 0$

Vastaus:

a) $y = C_1e^x + C_2x$

b) $y = c_1e^x + C_2x^2$

c) $y = e^x(C_1 + C_2e^{x^2})$

109. Etsi laskentaohjelmalla *Airyn differentiaaliyhtälön* $y'' - xy = 0$ yleinen ratkaisu. Etsi yksityisratkaisut, kun alkuehtona on a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Piirrä ratkaisujen kuvaajat samaan kuvioon. Tarkastele erityisesti negatiivisia muuttujan arvoja. Miten ratkaisufunktioiden nollakohdat näyttävät suhtautuvan toisiinsa?

110. Differentiaaliyhtälöllä $y'' + y = 0$ on yksittäisratkaisuina $\sin x$ ja $\cos x$. Etsi yleisellä vakioiden varioinnilla differentiaaliyhtälön $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ yleinen ratkaisu.

Vastaus:

$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| + x \cos x$

111. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + x(y' - y'') = y + 1$ yksittäisratkaisu, kun alkuehtona on a) $y(0) = y'(0) = 0$, b) $y(1) = y'(1) = 0$, c) $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Vastaus:

a) $y = e^x - x - 1$; b) ei ratkaisua; c) $y = C(e^x - ex) + x - 1$.

112. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + y' \tan x = x \cos x$ yleinen ratkaisu.

Vastaus:

$y = C_1 \sin x + C_2 + \frac{1}{2}x^2 \sin x + x \cos x$

113. Etsi differentiaaliyhtälön $(x-1)y'' - xy' + y = x - 1$ yleinen ratkaisu ja alkuehdon $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$ toteuttava yksittäisratkaisu.

Vastaus:

$y = C_1 e^x + C_2 x + e^x \int e^{-x}/(x-1)\,dx - x \ln|x-1| - 1$; $y = x + e^x \int_2^x e^{-t}/(t-1)\,dt - x\ln(x-1) - 1$, $x > 1$

114. Sovella yleistä vakioiden variointia yhtälön $y'' + ay' + by = R(x)$ yksityisratkaisun etsimiseen, kun $a^2 - 4b$ on a) > 0, b) $= 0$, c) < 0.

115. Pidetään tunnettuna, että homogeeniyhtälön $y'' + \omega^2 y = 0$ ratkaisut ovat $y_1(x) = \sin \omega x$, $y_2(x) = \cos \omega x$. Sovella vakioiden variointia yhtälön $y'' + \omega^2 y = A \sin \omega x + B \cos \omega x$ yksityisratkaisun etsimiseen.

116. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut laskemalla käsin.

a) $y' - y = \cos x$

b) $y' - y = e^x + x^2$

Vastaus:

a) $y = Ce^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$

b) $y = Ce^x + xe^x - x^2 - 2x - 2$

117. Ratkaise alkuarvoprobleemat laskemalla käsin.

a) $y' + 2y = x^3 - x$, $y(1) = 0$

b) $y' + 3y = x^2 + 1$, $y(0) = 1$

c) $y' + y = \sinh x$, $y(0) = 0$

Vastaus:

a) $y = \frac{1}{8}(e^{2-2x} + 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)$

b) $y = \frac{1}{27}(16e^{-3x} + 9x^2 - 6x + 11)$

c) $y = \frac{1}{2}(\sinh x - xe^{-x})$

118. Muodosta kaikilla vakioiden a, b arvoilla vakiokertoimisen yhtälön $y'' + ay' + by = 0$ perusratkaisut. Laske perusratkaisujen Wronskin determinantti ja saata se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

Vastaus:

$W = Ce^{-ax}$

119. Olkoon $a \neq 0$. Määritä origossa annettu alkuehto, jolla yhtälön $y' + ay = A \sin \omega x$ ratkaisu on jaksollinen. Määritä tämän amplitudi.

Vastaus:

$y(0) = -A\omega/(a^2 + \omega^2)$, $|A|/\sqrt{a^2 + \omega^2}$

120. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut käsin laskemalla.

a) $y'' + 4y' + 5y = 3x - 2$

b) $y'' - y' - 2y = 4x$

c) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

d) $y'' + 4y = \sin 3x$

e) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}$

Vastaus:

a) $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{3}{5}x - \frac{22}{25}$

b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2x + 1$

c) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x} + \frac{5}{74} \sin x + \frac{7}{74} \cos x$

d) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$

e) $y = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4})$

121. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut käsin laskemalla.

a) $y'' - 2y' + y = e^x + \cos x$

b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + \sin x$

c) $y'' - 4y = xe^{2x}$

Vastaus:

a) $y = e^x(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}\sin x$

b) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2) + \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x$

c) $y = e^{2x}(C_1 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}x^2) + C_2 e^{-2x}$

122. Etsi käsin laskemalla yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}/x^2$.

Vastaus:

$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x - \ln|x|)$

123. Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat

a) $y'' - 4y' + 5y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

b) $y'' - 3y' + x^2 - 1 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

c) $y'' - 2y' + y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$

Vastaus:

a) $y = \frac{1}{8}[-e^{2x}(7\sin x + \cos x) + \sin x + \cos x]$

b) $y = \frac{1}{81}(7e^{3x} + 9x^3 + 9x^2 - 21x + 74)$

c) $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x$

124. Ratkaise reuna-arvoprobleema $y'' - 5y' + 6y = e^x$, $y(0) = y(1) = 0$.

Vastaus:

$y = \frac{1}{2}(e^{3x-1} - e^{2x} - e^{2x-1} + e^x)$

125. Määritä sellainen alkuehto, että yhtälön $y'' + 5y' + 6y = x$ yksittäisratkaisu on polynomi.

Vastaus:

$y(0) = -\frac{5}{36}$, $y'(0) = \frac{1}{6}$

126. Ratkaise alkuarvoprobleema $y'' + y = 2\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Vastaus:

$y = \sin x - x\cos x$

127. Olkoot a ja b mitä tahansa reaalilukuja. Tutki, mitä laskentaohjelma antaa seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleisiksi ratkaisuiksi. Ovatko saadut ratkaisut päteviä kaikilla vakioiden arvoilla?

a) $y'' + ay' = e^{bx}$

b) $y'' - a^2 y = e^{bx}$

c) $y'' + a^2 y = e^{bx}$

d) $y'' + a^2 y = \sin bx$

e) $y'' + a^2 y = x \sin bx$

f) $y'' + 2y' + (1 + a^2) y = e^{bx}$

Vastaus:

a) Jos $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$, niin $y = C_1 e^{-ax} + C_2 + \frac{1}{b(a+b)} e^{bx}$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 e^{-ax} + C_2 - \frac{x}{a} e^{-ax}$;
jos $a \neq 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 e^{-ax} + C_2 + \frac{x}{a}$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$.

b) Jos $a \neq 0$, $b^2 \neq a^2$, niin $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{1}{b^2 - a^2} e^{bx}$;
jos $a \neq 0$, $b = a$, niin $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{x}{2a} e^{ax}$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - \frac{x}{2a} e^{-ax}$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$.

c) Jos $a \neq 0$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$.

d) Jos $a \neq 0$, $b^2 \neq a^2$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{1}{a^2 - b^2} \sin bx$;
jos $a \neq 0$, $b = a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax - \frac{x}{2a} \cos ax$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{x}{2a} \cos ax$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 - \frac{1}{b^2} \sin bx$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2$.

e) Jos $a \neq 0$, $b^2 \neq a^2$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{x}{a^2 - b^2} \sin bx - \frac{2b}{(a^2 - b^2)^2} \cos bx$;
jos $a \neq 0$, $b = a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax - \frac{x^2}{4a} \cos ax + \frac{x}{4a^2} \sin ax$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{x^2}{4a} \cos ax - \frac{x}{4a^2} \sin ax$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 - \frac{x}{b^2} \sin bx - \frac{2}{b^3} \cos bx$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2$.

f) Jos $a \neq 0$, niin $y = e^{-x}(C_1 \sin ax + C_2 \cos ax) + \frac{1}{a^2 + (b+1)^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b \neq -1$, niin $y = e^{-x}(C_1 x + C_2) + \frac{1}{(b+1)^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = -1$, niin $y = e^{-x}(C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2)$.

128. Ratkaise sekä käsin laskemalla että laskentaohjelmalla differentiaaliyhtälö $y'' + \omega^2 y = A \sin \omega x + B \cos \omega x$.

Vastaus:

$y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x + \frac{B}{2\omega} x \sin \omega x - \frac{A}{2\omega} x \cos \omega x$

129. Olkoon $h(x)$ lineaarista vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä $y'' + ay' + by = R(x)$ vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Osoita, että

$$y(x) = \int_0^x h(x-t)R(t)\, dt$$

on epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisu, jolle $y(0) = y'(0) = 0$. Ratkaise tällä menettelyllä alkuarvoprobleema $y'' + y = \tan x$, $y(0) = y'(0) = 0$. Tarkista sijoittamalla, että tulos todella on alkuarvoprobleeman ratkaisu.

130. Määritä ne reaaliset parametrin a arvot, joilla yhtälöillä

$$y'' + 2ay' - 4y = 0 \quad \text{ja} \quad y'' - 2y' + ay = 0$$

on yhteinen ei-triviaali ($\not\equiv 0$) ratkaisu. Määritä kussakin tapauksessa yhteinen ratkaisu. Tutki tehtävän ratkaisemista sekä laskentaohjelmalla että käsin laskemalla.

Vastaus:

$a = 0, y = Ce^{2x}$;
$a = \frac{1}{8}(-5 + 3\sqrt{17}), y = Ce^{\frac{1}{4}(1+\sqrt{17})x}$;
$a = \frac{1}{8}(-5 - 3\sqrt{17}), y = Ce^{\frac{1}{4}(1-\sqrt{17})x}$

131. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt.

a) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$

b) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

d) $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = e^x$

e) $y''' + 3y'' - 2y = \sin x$

Vastaus:

a) $y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \sin x + C_5 x \cos x$

b) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x + C_7 x^2)$

c) $y = \frac{1}{30} e^{4x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$

d) $y = \frac{1}{4} x e^x + C_1 e^x + C_2 e^x \sin 2x + C_3 e^x \cos 2x$

e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{(\sqrt{3}-1)x} + C_3 e^{-(\sqrt{3}+1)x} - \frac{5}{26} \sin x + \frac{1}{26} \cos x$

132. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt.

a) $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 2e^{-2x} - 2x$

b) $y'''' - 4y''' + 12y'' + 4y' - 13y = 9e^{2x} + 52x - 3$

c) $y'''' + 3y''' + 3y'' + y' = 2e^{-2x} - 2x$

Vastaus:

a) $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3x + C_4x^2) + e^{-2x} - x^2 + 6x$

b) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{2x}(C_3\sin 3x + C_4\cos 3x) + \frac{1}{3}e^{2x} - 4x - 1$

c) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} + C_4 + e^{-2x} - x^2 + 6x$

133. Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat.

a) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -5$, $y''(0) = 1$

c) $y''' - y'' - y' + y = e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Vastaus:

a) $y = e^x$

b) $y = 2e^{-x} + e^x - 2e^{2x} + x^2 - 2x + 3$

c) $y = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{4}e^x(1 + 2x) - \frac{1}{12}e^{-x}$

134. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Etsi laskentaohjelmaa käyttäen seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut ja esitä nämä kaikissa tapauksissa reaalisessa muodossa. Tutki, mitkä vakion a arvot ovat poikkeuksellisia: ratkaisun muoto on erilainen. Hae ratkaisu erikseen näissä tapauksissa.

a) $y''' - ay' = 0$

b) $y^{(4)} + a^4y = x^2$

c) $y''' - (a+2)y'' + (2a+1)y' - ay = x + 1$

Vastaus:

a) Jos $a > 0$, niin $y = C_1e^{\sqrt{a}x} + C_2e^{-\sqrt{a}x} + C_3$;
jos $a < 0$, niin $y = C_1\sin(\sqrt{-a}x) + C_2\cos(\sqrt{-a}x) + C_3$;
jos $a = 0$, niin $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$.

b) Jos $a \neq 0$, niin $y = e^{ax/\sqrt{2}}(C_1\sin(ax/\sqrt{2}) + C_2\cos(ax/\sqrt{2}))$
$+ e^{-ax/\sqrt{2}}(C_3\sin(ax/\sqrt{2}) + C_4\cos(ax/\sqrt{2})) + x^2/a^4$;
jos $a = 0$, niin $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \frac{1}{360}x^6$.

c) Jos $a \neq 0$, $a \neq 1$, niin $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{ax} - (ax + 3a + 1)/a^2$;
jos $a = 0$, niin $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3 + (x^2 + 6x)/2$;
jos $a = 1$, niin $y = C_1e^x + C_2xe^2 + C_3x^2e^x - x - 4$

135. Etsi kaikki differentiaaliyhtälön $y''' + y'' + 2y' + 2y = 0$ jaksolliset ratkaisut.

Vastaus:

$y = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$

136. Muunna *Eulerin differentiaaliyhtälö*

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

sijoituksella $t = \ln|x|$ vakiokertoimiseksi lineaariyhtälöksi. Sovella tulosta yhtälöön

$$x^2 y'' - xy' + y = 0,$$

ratkaise saatu vakiokertoiminen yhtälö ja muodosta tämän avulla alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu.

Vastaus:

$u''[t] + (a-1)u'[t] + bu[t] = 0;\ y = C_1 x + C_2 x \ln|x|$

137. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt käyttämällä muotoa $y = x^r$ olevaa yritettä.

a) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

b) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

c) $x^2 y'' + 5xy' + y = 0$

d) $x^2 y'' + xy' + y = 0$

e) $x^3 y''' + xy' - y = 0$

Vastaus:

a) $y = C_1 x^2 + C_2/x^3$

b) $y = C_1/x + C_2 \ln|x|/x$

c) $y = C_1 x^{-2+\sqrt{3}} + C_2 x^{-2-\sqrt{3}}$

d) $y = C_1 \sin\ln|x| + C_2 \cos\ln|x|$

e) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2$

138. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 \sin x$ yritteellä $y = x^r$ ja vakioiden varioinnilla. Etsi alkuehtoa $y(\pi) = \pi$, $y'(\pi) = 0$ vastaava yksittäisratkaisu.

Vastaus:

$y = C_1 x + C_2 x^2 + x \cos x + x^2 \int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\, dt;\ C_1 = 3, C_2 = -1/\pi$

139. Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut.

a) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x$

b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$

c) $x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$

Vastaus:

a) $y = C_1x + C_2x^2 - x\ln|x|$

b) $y = C_1x + C_2/x + \frac{1}{3}x^2$

c) $y = C_1x^2 + C_2x^3 + 1/(12x)$

140. Olkoot p ja q reaalilukuja. Ratkaise laskentaohjelmalla kaikissa tapauksissa differentiaaliyhtälö $x^2y'' + (2p+1)xy' + qy = 0$. Esitä vastaus reaalisessa muodossa.

Vastaus:

Jos $q < p^2$, niin $y = C_1x^{-p+\sqrt{p^2-q}} + C_2x^{-p-\sqrt{p^2-q}}$;
jos $q = p^2$, niin $y = x^{-p}(C_1 + C_2\ln x)$;
jos $q > p^2$, niin $y = x^{-p}(C_1\sin(\sqrt{q-p^2}\ln x) + C_2\cos(\sqrt{q-p^2}\ln x))$.

141. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

a) $(x+1)^2y'' + (x+1)y' + y = x^2$

b) $(3x+2)^2y'' + 7(3x+2)y' + 63x - 18 = 0$

Vastaus:

a) $y = C_1\sin\ln|x+1| + C_2\cos\ln|x+1| + \frac{1}{5}(x^2 - 3x + 1)$

b) $y = C_1 + C_2(3x+2)^{-4/3} - 3x + 5\ln|3x+2|$

142. Tutki, mitkä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvot johtavat muotoa $x^p\ln x$, $p \in \mathbb{R}$, olevien funktioiden esiintymiseen differentiaaliyhtälön $x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + ay = 0$ yleisessä ratkaisussa.

Vastaus:

$\frac{2}{27}(19 + 13\sqrt{13})$, $\frac{2}{27}(19 - 13\sqrt{13})$

Lineaariset differentiaaliyhtälöryhmät

143. Seuraavissa differentiaaliyhtälöryhmissä riippumattomana muuttujana on x ja tuntemattomat funktiot ovat $y(x)$ ja $z(x)$. Palauta ryhmät yhdeksi differentiaaliyhtälöksi eliminoimalla toinen tuntematon funktio. Etsi tällä tavoin ryhmien ratkaisut. Ratkaise yhtälöryhmät myös suoraan laskentaohjelmalla. Vertaa eri tavoin saatuja tuloksia.

a) $\begin{cases} y' = z + x \\ z' = y + x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = y - z + \sin x \\ z' = y + z + \cos x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y - z + e^x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 y' + z = x^2 \\ z' + 2y = x \end{cases}$

Vastaus:

a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x - 1$, $z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - x - 1$

b) $z = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$, $z = e^x(-C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$

c) $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} - e^x$, $z = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}x} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}x}$

d) $y = C_1 x + C_2/x^2 + \frac{1}{3} x \ln|x|$, $z = (\frac{2}{3} - C_1)x^2 + 2C_2/x - \frac{1}{3} x^2 \ln|x|$

144. Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat sekä käsin laskelmalla että laskentaohjelmalla. Vertaa tuloksia.

a) $\begin{cases} y' = 7y - z \\ z' = -y + 7z \end{cases}$ $\quad y(0) = 1,\ z(0) = 2$

b) $\begin{cases} 3y' - 5y + z' + 5z = 0 \\ y' - y + 2z = 0 \end{cases}$ $\quad y(0) = 1,\ z(0) = 2$

c) $\begin{cases} y' = z + x^2 \\ z' = y - x^2 \end{cases}$ $\quad y(0) = z(0) = 0$

d) $\begin{cases} y' = z + x \\ z' = y + x, \end{cases}$ $\quad x(1) = y(1) = 2(e - 1)$

Vastaus:

a) $y = -\frac{1}{2} e^{8x} + \frac{3}{2} e^{6x}$, $z = \frac{1}{2} e^{8x} + \frac{3}{2} e^{6x}$

b) $y = e^x(\cos 2x - 2 \sin 2x)$, $z = e^x(2 \cos 2x + \sin 2x)$

c) $y = -z = -2e^{-x} + x^2 - 2x + 2$

d) $y = z = 2e^x - x - 1$

145. Olkoot x, y ja z muuttujan t funktioita. Etsi differentiaaliyhtälöryhmän $x' + y = y' + z = z' + x = 0$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ toteuttava yksittäisratkaisu. Ratkaise tehtävä myös laskentaohjelmalla ja pyri saattamaan ratkaisu mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

Vastaus:

$x = C_1e^{-t} + e^{t/2}(C_2 \sin(\sqrt{3}t/2) + C_3 \cos(\sqrt{3}t/2))$,
$y = C_1e^{-t} + e^{t/2}(-\frac{1}{2}(C_2 - \sqrt{3}C_3) \sin(\sqrt{3}t/2) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}C_2 + C_3) \cos(\sqrt{3}t/2))$,
$z = C_1e^{-t} + e^{t/2}(-\frac{1}{2}(C_2 + \sqrt{3}C_3) \sin(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}C_2 - C_3) \cos(\sqrt{3}t/2))$;
$x = y = z = e^{-t}$

146. Olkoot x ja y muuttujan t funktioita. Tutki piirtämällä seuraavien differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisukäyriä faasiavaruudessa. Määritä faasitasokäyrien yhtälöt.

a) $x' + 2y = y' + 3x = 0$

b) $x' - 2y = y' + 3x = 0$

Vastaus:

a) $3x^2 - 2y^2 = C$

b) $3x^2 + 2y^2 = C$

147. Olkoot $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ja $u(t)$ tuntemattomia funktioita, joille pätee $x' = y$, $y' = z$, $z' = u$, $u' = x$. Määritä funktiot. Tutki piirtämällä ratkaisukäyriä faasiavarudessa. Etsi jokin faasiavaruudessa rajoitettu ratkaisukäyrä ja piirrä tämän projektiot faasiavaruuden koordinaattitasoille.

Vastaus:

$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t$, $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3 \cos t - C_4 \sin t$,
$z = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t$, $u = C_1e^t - C_2e^{-t} - C_3 \cos t + C_4 \sin t$

148. Olkoot $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ tuntemattomat funktiot. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

alkuehdolla $x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3$. Laske käsin ja tarkasta tulos laskentaohjelmalla.

Vastaus:

$x = \frac{1}{5}(6 - \cos(\sqrt{5}t) - \sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t))$,
$y = \frac{1}{5}(12 - 2\cos(\sqrt{5}t) + \sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t))$,
$z = \frac{3}{5}(4 + \cos(\sqrt{5}t))$

149. Ratkaise laskentaohjelmalla differentiaaliyhtälöryhmä $x' = y/t$, $y' = z/t$, $z' = x/t$, missä tuntemattomat funktiot ovat $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$. Tutki ratkaisukäyrän käyttäytymistä xyz-avaruudessa, kun $t \to \infty$. Onko mahdollista löytää alkuehto, jolla käyrä lähestyisi origoa?

Vastaus:

On mahdollista.

150. Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ tuntemattomat funktiot. Etsi yleinen ratkaisu seuraavalle differentiaaliyhtälöryhmälle sekä käsin laskemalla että laskentaohjelmalla.

$$\begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0 \\ y'' + x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

Vastaus:

$x = e^t(C_1 + C_2t) + e^{-t}(C_3 + C_4t) - 23$, $y = \frac{1}{2}e^t(C_2 - C_1 - C_2t) - \frac{1}{2}e^{-t}(C_3 + C_4 + C_4t) + 18$

151. Johda välttämätön ja riittävä ehto sille, että differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

ratkaisussa esiintyy trigonometrisia funktioita. Onko ehto $bc < 0$ a) välttämätön, b) riittävä?

Vastaus:

$(a-d)^2 + 4bc < 0$; on välttämätön, mutta ei riittävä.

152. Kirjoita seuraavat differentiaaliyhtälöryhmät matriisimuotoon. Ratkaise ryhmät laskentaohjelmalla. Määritä kerroinmatriisin ominaisarvot. Mikä yhteys näillä näyttäisi olevan?

a) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y + 3z \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + y - 2z \\ y' = 2x - 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 2x - y + 3z \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = x - 2y - 2z \\ y' = 2x + y + 3z \\ z' = x + y + 4z \end{cases}$

Sarjaratkaisut

153. Ratkaise origokeskisen potenssisarjan avulla differentiaaliyhtälö $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Vastaus:

$y = a_0(1+x^2)+x+x^3$

154. Etsi differentiaaliyhtälön $y''-2y'+y=0$ yleinen ratkaisu origokeskisen potenssisarjan muodossa. Ratkaise differentiaaliyhtälö myös alkeisfunktioiden avulla. Muodosta ratkaisufunktion Maclaurinin sarja. Onko tämä sama kuin edellä saatu sarjaratkaisu?

Vastaus:

$y = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$

155. Etsi potenssisarjamuodossa ratkaisu alkuarvoprobleemalle $y''-2xy'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Määritä sarjan suppenemissäde.

Vastaus:

$y = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!(2k-1)}$; $R=\infty$

156. Etsi differentiaaliyhtälön $y''=y$ yleinen ratkaisu origokeskisten potenssisarjojen avulla.

Vastaus:

$y = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$

157. Etsi origokeskinen sarjaratkaisu *Legendren differentiaaliyhtälölle*

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

arvolla $p=2$. Totea, että yhtälöllä on yksityisratkaisuna polynomi.

Vastaus:

$y = C_1(1-3x^2)+C_2(x-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{4x^7}{35}-\frac{5x^9}{63}-\dots)$

158. Etsi alkuarvoprobleemalle $y'=x^2-y^2$, $y(0)=\frac{1}{2}$ potenssisarjaratkaisu. Tutki sarjan suppenemissädettä numeerisesti ja piirrä saadun sarjaratkaisun kuvaaja.

Vastaus:

$y = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\frac{13x^3}{48}-\frac{5x^4}{96}+\frac{11x^5}{320}-\frac{41x^6}{1920}-\frac{251x^7}{80640}+\dots$

159. Etsi differentiaaliyhtälölle $y'=x^2-y^2$ yksittäisratkaisu potenssisarjamuodossa, kun alkuehtona on a) $y(0)=0$, b) $y(0)=1$. Piirrä laskemasi osasumman kuvaaja. Ratkaise sama alkuarvoprobleema myös numeerisesti ja piirrä saadun numeerisen ratkaisun kuvaaja. Vertaa tuloksia. Laske approksimaatioita alkuehtoja vastaavien potenssisarjojen suppenemissäteille. Riippuuko suppenemissäde alkuehdosta? Onko mahdollista arvioida suppenemissädettä kuvaajien perusteella?

Numeerinen ratkaiseminen

160. Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleemat a) $y' = y$, $y(0) = 1$, b) $y' = -y$, $y(0) = 1$. Käytä askelpituudeksia $h = 0.2$ ja $h = 0.5$. Valitse tarkasteluväliksi $[0,5]$. Vertaa tulosta tarkkaan ratkaisuun. Miten numeerisen ratkaisun virheen käy muuttujan kasvaessa? Millä tavalla a- ja b-kohta ovat tarkkuuden suhteen erilaisia?

161. Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleema $y' = 2xy + 1$, $y(0) = 1$. Käytä askelpituuksia a) $h = 0.2$, b) $h = 0.02$. Piirrä ratkaisukäyrät välillä $[-2,1]$. Muodosta myös yhtälön tarkka ratkaisu.

162. Ratkaise numeerisesti alkuarvoprobleema $y' = |y^2 - 1|$, $y(0) = -0.9$. Käytä askelpituutta $h = 0.5$ ja vertaa eri menetelmiä. Tarkastele väliä $[0,7]$. Laske myös tarkka ratkaisu.

163. Differentiaaliyhtälö

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2$$

esittää erästä populaatiomallia; tässä p on populaation koko ja $\alpha,\ \beta > 0$ ovat vakioita. Olkoon $\alpha = \beta = 10$ ja alkuehtona $p(0) = 0.1$. Muodosta Eulerin menetelmän mukainen iteraatiokaava differentiaaliyhtälön numeerista ratkaisemista varten. Ratkaise yhtälö käyttäen askelpituuksia $h = 0.30$, $h = 0.25$, $h = 0.20$, $h = 0.15$ ja $h = 0.10$. Kokeile myös parannettua Eulerin menetelmää, Rungen – Kuttan ja Adamsin – Bashforthin menetelmää.

164. Tutki alkuarvoprobleeman $y' = 2xy$, $y(0) = 1$ numeerista ratkaisemista eri menetelmillä. Laske $y(5)$. Käytä askelpituuksia $h = 0.2$ ja $h = 0.5$. Vertaa eri menetelmien antamia tuloksia ja selitä syntyneet erot.

165. Kirjoita differentiaaliyhtälöä $y'' + xy' + y = 0$ vastaava ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmä ja muodosta tämän perusteella Eulerin menetelmän mukaiset numeeriset ratkaisukaavat, kun alkuehdot ovat $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Vastaus:

$y' = z$, $z' = -xz - y$;
$y_0 = 1$, $z_0 = 2$, $y_{n+1} = y_n + hz_n$, $z_{n+1} = z_n - h(nhz_n + y_n)$

166. Ratkaise numeerisesti eri menetelmillä alkuarvoprobleema $y''' + 3y'' - 2y = \sin x$, $y(1) = 0.659804$, $y'(1) = -1.04984$, $y''(1) = 1.36261$. Käytä askelpituuksia $h = 0.1$ ja $h = 0.05$. Valitse tarkasteluväliksi $[1,10]$. Piirrä kuviot ja vertaa tuloksia. Mitä tapahtuu, jos ratkaisuja tarkastellaan pidemmällä välillä $[1,30]$? Miksi? Muodosta ilmiön selittämiseksi yhtälön yleinen ratkaisu.

167. Differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ v' = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

kuvaa planeetan liikettä kiinteän auringon ympäri ajan funktiona. Planeetan paikkakoordinaatit ovat x ja y, nopeuden komponentit u ja v. Ratkaise yhtälöryhmä numeerisesti eri menetelmillä eri alkuehtoja ja askelpituuksia käyttäen ja vertaa tuloksia. Esimerkiksi sopivasta alkuehdosta kelpaa $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $u(0) = 0.5$, $v(0) = 0.5$ ja sopivasta askelpituudesta $h = 0.01$. Kokeile kuitenkin muitakin.

Epästabiilit ja kaoottiset ilmiöt

168. Piirrä alkuarvotehtävän $y' = (1+x)y + 1 - 3x + x^2$, $y(0) = 0.06$ ratkaisukäyrät käyttäen sekä Eulerin että Rungen–Kuttan menetelmiä. Käytä askelpituutta $h = 0.04$. Voidaanko tämän perusteella olla varmoja ratkaisukäyrien kvalitatiivisesta käyttäytymisestä?

169. Tutki differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = y + x(x^2+y^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right) \\ y' = -x + y(x^2+y^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right) \end{cases}$$

ratkaisukäyriä faasitasossa numeerisesti. Millaisia käyrät ovat? Millaisia käyriä (*attraktoreja*) ne lähestyvät?

170. Piirrä Rungen–Kuttan menetelmällä alkuarvoprobleeman $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ ratkaisu välillä $x \in [0, 300]$. Käytä askelpituutta $h = 0.1$. Havaintosi? Puolita askelpituus ja piirrä kuvaaja uudelleen. Entä jos tällä puolitetulla askelpituudella piirrettäisiinkin ratkaisu välillä $x \in [0, 1000]$? Mikä voisi olla selityksenä havaituille ilmiöille?

171. Tutki alkuarvoprobleeman $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ numeerista ratkaisua eri menetelmillä välillä $[0, 1000]$. Käytä askelpituuutta $h = 0.1$. Osaatko selittää syntyvän ilmiön?

172. Tutki alkuarvoprobleeman $y' = x - y^2$, $y(0) = a$ ratkaisuja kokeellisesti antamalla vakiolle a erilaisia arvoja ja ratkaisemalla yhtälö numeerisesti. Määritä kolmen desimaalin tarkkuudella sellainen arvo, että sen eri puolilla ratkaisut käyttäytyvät oleellisesti eri tavoin.

Vastaus:

$a \approx -0.729$; tarkka arvo $-\sqrt[3]{3}\,\Gamma(\frac{2}{3})/\Gamma(\frac{1}{3})$.

Sovellukset

173. Määritä seuraavien käyräparvien kohtisuorat leikkaajat (parviparametri C; a, b, p vakioita). Piirrä kuvio.

a) $y = (x+C)^3$

b) $y = x^3 + C$

c) $y = Cx^p$

d) $ax^2 + by^2 = C$

e) $x^3 - 3xy^2 = C$

Vastaus:

a) $y = (-\frac{5}{9}x + C)^{3/5}$

b) $y = \frac{1}{3x} + C$

c) $x^2 + py^2 = C$

d) $y = Cx^{b/a}$

e) $y^3 - 3yx^2 = C$

174. Määritä sellainen käyrä, joka leikkaa kohtisuorasti sekä parvea $y = \sqrt{x-C}$ että parvea $y = e^{2x} + C$. Piirrä kuvio.

Vastaus:

$y = \frac{1}{4}e^{-2x}$

175. Käyräparvi muodostuu paraabeleista, joiden akselina on y-akseli, polttopisteenä origo ja jotka aukeavat ylöspäin. Muodosta parven differentiaaliyhtälö ja kohtisuorien leikkaajien differentiaaliyhtälö. Miten nämä suhtautuvat toisiinsa?

Vastaus:

$2yy' = x(y'^2 - 1)$

176. Määritä napakoordinaateissa annettujen käyräparvien

a) $r = C\cos\varphi$

b) $r = C\varphi$

kohtisuorat leikkaajat. Piirrä kuvio.

Vastaus:

a) $r = C \sin \varphi$

b) $r = Ce^{-\varphi^2/2}$

177. Etsi käyräparvi, joka leikkaa paraabeliparven $y = Cx^2$ kulmassa $\frac{\pi}{4}$.

Vastaus:

$\frac{1}{2}\ln(x^2 - xy + 2y^2) - \frac{3}{\sqrt{7}}\,\overline{\text{arc}}\tan\frac{2x-y}{y\sqrt{7}} = C$

178. Käyräparven differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa olkoon $F(r, \varphi, \frac{dr}{d\varphi}) = 0$. Mikä on sen parven differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa, joka leikkaa em. parven kulmassa α?

Vastaus:

$F(\varphi, r, \frac{rr' + mr^2}{r - mr'}) = 0$, missä $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ ja $m = \tan\alpha$.

179. Määritä ne käyrät, joilla kiinteästä muuttujan arvosta laskettu kaarenpituus on suoraan verrannollinen tangentin suuntakulman tangenttiin.

Vastaus:

$y = k\cosh(x/k + C_1) + C_2$, missä k on verrannollisuuskerroin.

180. Etsi ne käyrät, joilla x-akselin, käyrän pisteeseen osoittavan paikkavektorin ja tähän pisteeseen asetetun tangentin muodostaman kolmion ala on vakio ($= a$).

Vastaus:

$x = Cy \pm \frac{a}{y}$

181. Käyrän jokaisella normaalilla on seuraava ominaisuus: Normaalin ja käyrän leikkauspisteen etäisyys normaalin ja x-akselin leikkauspisteestä on vakio d. Millainen käyrä on kyseessä?

Vastaus:

$(x - C)^2 + y^2 = d^2$, $y = \pm d$

182. Säiliössä on m kg suolaliuosta, jonka suolapitoisuus on p_0 prosenttia. Säiliöön virtaa nopeudella q_1 kg/min suolaliuosta, jonka pitoisuus on p_1 prosenttia, ja se sekoittuu säiliössä olevaan liuokseen siten, että liuos kaiken aikaa säilyy homogeenisena. Samaan aikaan homogeenista liuosta virtaa ulos nopeudella q_2 kg/min. Muodosta säiliössä olevaa suolamäärää $s(t)$ kuvaava alkuarvoprobleema ja ratkaise se laskentaohjelmalla. Olkoon $m = 10$ kg, $p_0 = 5$ %. Piirrä suolamäärän kuvaaja tapauksissa a) $p_1 = 7$ %, $q_1 = 0.6$ kg/min, $q_2 = 0.5$ kg/min, b) $p_1 = 3$ %, $q_1 = q_2 = 0.5$ kg/min. Määritä liuoksen suolamäärä ja suolapitoisuus tunnin kuluttua.

Vastaus:

Differentiaaliyhtälö $s'(t) = \dfrac{p_1 q_1}{100} - \dfrac{q_2 s(t)}{m + (q_1 - q_2)t}$, alkuehto $s(0) = \dfrac{p_0 m}{100}$. a) 1.1 kg, 6.9 %; b) 0.31 kg, 3.1 %.

183. Oletetaan, että kappaleen putoamista vastustaa nopeuden neliöön verrannollinen voima, jolloin nopeus $v(t)$ toteuttaa Newtonin lain mukaan differentiaaliyhtälön $mv' = mg - av^2$. Tässä t on aika, m kappaleen massa, g maan vetovoiman kiihtyvyys ja a positiivinen vakio. Ratkaise yhtälö alkuehdolla $v(0) = v_0$ laskentaohjelmaa käyttäen. Määritä ns. rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Mikä on tämän fysikaalinen merkitys? Riippuuko rajanopeus alkunopeudesta v_0? Määritä rajanopeus, kun kyseessä on laskuvarjohyppääjä, joka painaa $m = 80$ kg, hänen nopeutensa varjon auetessa on $v_0 = 10$ m/s, maan vetovoiman kiihtyvyydelle käytetään arvoa $g = 9.8$ m/s^2 ja hidastuvuuskerroin on $a = 30$ kg/m.

Vastaus:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{a}} \frac{\sqrt{mg} + v_0\sqrt{a} - (\sqrt{mg} - v_0\sqrt{a})e^{-2\sqrt{ag/m}t}}{\sqrt{mg} + v_0\sqrt{a} + (\sqrt{mg} - v_0\sqrt{a})e^{-2\sqrt{ag/m}t}}; \text{ raja-arvo} = \sqrt{\frac{mg}{a}} \approx 5.1\text{m/s}$$

184. Nesteeseen upotettu massa m on ripustettu pystysuoraan kierrejouseen, jonka jousivakio on k. Massa saatetaan pystysuoraan värähdysliikkeeseen antamalla sille alkupoikkeama ja alkunopeus; lisäksi siihen vaikuttaa ajan mukana muuttuva pystysuora ulkoinen voima $F(t)$. Neste vastustaa liikettä nopeuteen verrannollisella voimalla (verrannollisuuskerroin $= c$). Johda systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälö.

185. Nesteeseen upotettu massa m on ripustettu pystysuoraan kierrejouseen. Massan pystysuoraa liikettä kuvaa tällöin differentiaaliyhtälö $my'' + cy' + ky = F(t)$, missä k on jousivakio, kerroin c kuvaa nesteestä aiheutuvaa kitkaa ja $F(t)$ on massaan vaikuttava ulkoinen ajan mukana muuttuva pystysuora voima. Aseta ulkoinen voima jaksolliseksi: $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Valitse yhtälössä oleviksi vakioiksi esimerkiksi $m = 1$, $k = 5$, $c = 2$, $F_0 = 1$, $\omega = 1$. Tutki systeemin käyttäytymistä erilaisilla alkuehdoilla ajan funktiona. Mitä mahdetaan tarkoittaa ratkaisun transientilla komponentilla ja tasapainotilaratkaisulla (steady state solution)?

186. Nesteeseen upotettu massa m on ripustettu pystysuoraan kierrejouseen ja siihen vaikuttaa ulkoinen ajan mukana muuttuva pystysuora jaksollinen voima $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Jos k on jousivakio ja kerroin c kuvaa nesteestä aiheutuvaa kitkaa, massan pystysuoraa liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö $my'' + cy' + ky = F(t)$. Aseta $c = 0$, jolloin neste ei vastusta liikettä ja etsi joko kokeellisesti tai laskemalla sellainen voiman $F(t)$ taajuus ω, että systeemi on resonanssissa: heilahtelun amplitudi kasvaa rajatta (ja systeemi räjähtää rikki). Miten systeemi käyttäytyy, kun ω on resonanssikohdan lähellä?

187. Nesteeseen upotettu massa m on ripustettu pystysuoraan kierrejouseen ja siihen vaikuttaa ulkoinen ajan mukana muuttuva pystysuora jaksollinen voima $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Jos k on jousivakio ja kerroin c kuvaa nesteestä aiheutuvaa kitkaa, massan pystysuoraa liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö $my'' + cy' + ky = F(t)$. Jos $c = 0$, jolloin neste ei vastusta liikettä, on mahdollista löytää taajuus ω, jolla systeemi on resonanssissa, ts. heilahtelun amplitudi kasvaa rajatta (ja systeemi räjähtää rikki). Tutki kokeellisesti, onko tämä mahdollista, jos $\omega \neq 0$.

188. Maapallon läpi keskipisteen kautta porataan tunneli ja tähän pudotetaan kivi. Kiven liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö $mx''(t) = -kx(t)$, missä $x(t)$ on kiven etäisyys maapallon keskipisteestä hetkellä t, kiven massa on m ja k on liikettä karakterisoiva positiivinen vakio. Kivi pudotetaan tunneliin antamatta sille alkunopeutta. Laske, miten pitkän ajan kuluttua kivi palaa lähtökohtaansa ja mikä on sen nopeus maapallon keskipisteen kohdalla. Maapallon säde on $R = 6370$ km ja maan vetovoiman kiihtyvyys $x''(0) = -g = -9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

Vastaus:

Noin 84.4 minuutin kuluttua; 7910 m/s = 28500 km/h.

189. Heiluri, joka muodostuu painottoman varren (pituus L) päässä olevasta massasta m, saatetaan heilahtelemaan pystysuorassa tasossa. Heilahduskulma olkoon ϑ. Muodosta Newtonin lakien mukainen liikeyhtälö, johda vastaava normaaliryhmä ja totea se autonomiseksi. Muodosta normaaliryhmästä faasitasokäyrien differentiaaliyhtälö ja ratkaise se. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia.

Vastaus:

$\vartheta'' + (g/L)\sin\vartheta = 0; \quad y_1' = y_2, y_2' = -(g/L)\sin y_1;$
$\dfrac{dy_1}{dy_2} = -\dfrac{Ly_2}{g\sin y_1}; \quad y_2^2 = 2(g/L)\cos y_1 + 2C$

190. Utopian valtakunnassa väestö haluaa sitä vähemmän hyödykkeitä, mitä enemmän se on jo niitä hankkinut. Niinmuodoin elintason nousu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon. Tutki, kasvaako elintaso rajatta Utopiassa. Voidaanko tällä mallilla kuvata Utopian elintasoa hamasta muinaisuudesta kaukaiseen tulevaisuuteen?

Vastaus:

$y(t) = \sqrt{kt + C}$, missä y on elintaso ja k verrannollisuuskerroin.