2. Reaaliluvut

2.1. Aksioomat

52.

Määritä seuraavien joukkojen supremum, infimum, maksimi ja minimi, mikäli nämä ovat olemassa:

a) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-2)(x+4) > 0 \,\}$,
b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| + |x+2| < 5 \,\}$, c) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x||x+2| < 5 \,\}$,
d) $\{\, 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, e) $\{\, \dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, f) $\{\, \dfrac{3n-2}{-5-n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

VASTAUS: a) $\sup = \infty$, $\inf = -4$, $\nexists \max$, $\nexists \min$;
b) $\sup = \frac{3}{2}$, $\inf = -\frac{7}{2}$, $\nexists \max$, $\nexists \min$;
c) $\sup = -1 + \sqrt{6}$, $\inf = -1 - \sqrt{6}$, $\nexists \max$, $\nexists \min$;
d) $\sup = 2$, $\inf = 1$, $\nexists \max$, $\min = 1$;
e) $\sup = 1$, $\inf = \frac{1}{2}$, $\nexists \max$, $\min = \frac{1}{2}$;
f) $\sup = -\frac{1}{6}$, $\inf = -3$, $\max = -\frac{1}{6}$, $\nexists \min$.

53.

Piirrä reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion a) $f(x) = |x| + |x+2|$, b) $f(x) = |x||x+2|$ kuvaaja. Päättele tästä joukon a) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| + |x+2| < 5 \,\}$, b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x||x+2| < 5 \,\}$ supremum ja infimum.

VASTAUS:

54.

Olkoot A ja B kaksi ei-tyhjää reaalilukujoukkoa, joiden alkioille pätee $a < b$ kaikilla $a \in A$, $b \in B$. Todista, että $\sup A \leq \inf B$.

VASTAUS:

55.

Olkoon $S \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu joukko, $G = \sup S$ ja $\varepsilon > 0$. Todista, että on olemassa $x \in S$, jolle pätee $x > G - \varepsilon$.

VASTAUS:

56.

Olkoon $S \subset \mathbb{R}$ ei-tyhjä rajoitettu joukko. Todista: Jos $\inf S = \sup S$, niin joukossa S on täsmälleen yksi alkio.

VASTAUS:

57.

Olkoon $S \subset \mathbb{R}$ rajoitettu joukko ja $T = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -x \in S \,\}$. Osoita, että $\inf T = -\sup S$.

VASTAUS:

58.

Todista reaalilukujen aksioomiin perustuen *Arkhimedeen lause* (aksiooma): Jos a ja b ovat kaksi positiivista reaalilukua, niin on olemassa luonnollinen luku n siten, että $na > b$.

VASTAUS:

59.

Todista reaalilukujen aksioomien pohjalta: Jos $x > 0$ ja $y < 0$, niin $xy < 0$.

VASTAUS:

2.2. Reaalilukujen osajoukot

60.

Olkoot a ja b kaksi reaalilukua, $a < b$. Todista, että on olemassa rationaaliluku r, jolle pätee $a < r < b$.

VASTAUS:

61.

Olkoot a ja b kaksi reaalilukua, $a < b$. Todista, että on olemassa irrationaaliluku r, jolle pätee $a < r < b$.

VASTAUS:

62.

Todista, että jos x on irrationaalikuku, niin myös $\dfrac{3+x}{x-2}$ on irrationaalinen.

VASTAUS:

63.

Todista, että $\sqrt{3}$ ei voi olla rationaaliluku.

VASTAUS:

2.3. Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

64.

Osoita: a) $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$, b) $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

VASTAUS:

65.

Ratkaise epäyhtälöt a) $4x^2 - 13x + 4 < 1$, b) $\dfrac{1}{1-x} > 1+x$, c) $2x^3 > x^2 + 1$, d) $5x - 4 \leq x^2 \leq 25$.

VASTAUS: a) $\frac{1}{4} < x < 3$; b) $x < 0$ tai $0 < x < 1$; c) $x > 1$; d) $-5 \leq x \leq 1$ tai $4 \leq x \leq 5$.

66.

Ratkaise epäyhtälöt a) $2|x-2| < x+2$, b) $|1-|x|| > 2$, c) $|7x+21| + 9 \leq x^2$.

VASTAUS: a) $\frac{2}{3} < x < 6$; b) $x < -3$ tai $x > 3$; c) $x \leq -4$ tai $x = -3$ tai $x \geq 10$.

67.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Todista:

$$|x| < \frac{1}{2} \implies \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1.$$

VASTAUS:

68.

Osoita algebraa käyttäen: $a < b \implies a^3 < b^3$.

VASTAUS:

69.

Olkoot a ja b positiivisia. Osoita: $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} \geq a + b$.

VASTAUS:

70.

Osoita algebraa käyttäen: $a > 0 \implies a + \dfrac{1}{a} \geq 2$.

VASTAUS:

71.

Todista kaava

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

VASTAUS:

72.

Laske binomikertoimien summa $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

VASTAUS: 2^n.

73.

Näytä oikeaksi kaava

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k},$$

missä on oletettava $n \geq 4$, $2 \leq k \leq n-2$. Mikä on kaavan tulkinta Pascalin kolmion avulla?

VASTAUS:

74.

Laske summien $a+b+c$, $a+b+c+d$ ja $a+b+c+d+e$ potensseja, ja tutki, millaisia kertoimia lausekkeissa esiintyy. Miten binomikertoimet mahtavat yleistyä *multinomikertoimiksi*?

VASTAUS:

75.

Teekkari Sini Silmäinen on opintojensa alussa tehnyt Luotto-Tappio-Pankin kanssa lainasopimuksen, jonka mukaan hän nostaa jokaisen opiskeluvuoden alussa opintolainaa 20 000 mk. Vuotuinen lainakorko on 15 %, mutta opiskeluaikana ei korkoa tarvitse maksaa, vaan kertynyt korko liitetään jokaisen vuoden lopussa lainapääomaan. Paljonko teekkarilla on velkaa, kun hän 12 vuoden opintojen jälkeen lopulta valmistuu?

VASTAUS:

2.4. Liukuluvut

76.

Oktaalijärjestelmän kantaluku on 8 ja sen numeroita merkitään 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lausu kymmenjärjestelmän luvut a) 1000, b) 5432, c) 0.1 ja d) 5432.1 oktaalijärjestelmässä.

VASTAUS:

77.

Heksadesimaalijärjestelmän kantaluku on 16 ja sen numerot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Lausu luvut 123, ABC ja 1A2B a) kymmenjärjestelmässä, b) oktaalijärjestelmässä, c) binäärijärjestelmässä.

VASTAUS: a) 291, 2748, 6699; b) 443, 5274, 15053;
c) 100100011, 101010111100, 1101000101011.

78.

Kirjoita luku 10.128 liukulukuna a) kymmenjärjestelmässä, kun mantissan pituus on 4, b) binäärijärjestelmässä, kun mantissan pituus on 8.

VASTAUS: a) $+0.1013 \cdot 10^2$; b) $+0.10100010 \cdot 2^4$.

79.

Liukulukujärjestelmän kantalukuna on 10 ja mantissan pituutena 3. Laske tulot $(234 \cdot 582) \cdot 379$ ja $234 \cdot (582 \cdot 379)$.

VASTAUS: 51500000, 51700000

80.

Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 0.005x + y = 0.5 \\ \qquad x + y = 1 \end{cases}$$

käyttäen kymmenjärjestelmän liukulukuja, joilla mantissan pituus on 2. Riippuuko tulos laskujärjestyksestä?

VASTAUS: Laskujärjestyksestä riippuen esimerkiksi $x = 0.00,\ y = 0.50$ tai $x = y = 0.50$.