4. Matriisit ja vektorit

4.1. Matriisin käsite

4.2. Matriisialgebra

110.

Olkoon

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laske $A+B$, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B$, AB ja BA.

VASTAUS: $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ -5 & 14 & 9 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$,
$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad BA=\begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

111.

Olkoon $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$ ja $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Laske AB ja BA.

VASTAUS:

$$26, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -2 \\ 3 & 9 & 15 & 6 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 4 & 12 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

112.

Olkoon

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Minkä kokoisia matriiseja ovat $x^{\mathrm{T}}x$, xx^{T}, Ax, $x^{\mathrm{T}}Ax$ ja $xx^{\mathrm{T}}A$? Laske ne.

VASTAUS:

113.

Olkoon $\underset{3\times 3}{A}$ matriisi, jonka kaikki alkiot ovat $=1$, ja olkoon $\underset{3\times 3}{\Lambda}$ lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat 1, 2 ja 3. Laske $A\Lambda$ ja ΛA.

VASTAUS:

114.

Olkoon

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad u=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

laske $u^{\mathrm{T}}Au$, $u^{\mathrm{T}}u$, uu^{T}.

VASTAUS: $u^{\mathrm{T}}Au = x^2+5y^2+9z^2+6xy+14yz+10zx$, $\quad u^{\mathrm{T}}u = x^2+y^2+z^2$, $\quad uu^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & zx \\ xy & y^2 & yz \\ zx & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

115.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske potenssit A^k, $k = 1,2,3,\ldots,1992$.

VASTAUS:

116.

Millä tyyppiä koskevilla oletuksilla matriisit AB ja BA ovat a) molemmat määriteltyjä, b) samaa tyyppiä?

VASTAUS: a) $\underset{p\times n}{A}, \underset{n\times p}{B}$; $\quad$ b) $\underset{n\times n}{A}, \underset{n\times n}{B}$.

117.

Onko matriiseille voimassa $\quad$ a) $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$, $\quad$ b) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$?

VASTAUS: Yleisesti a) ei, b) ei.

118.

Todista matriisialgebran osittelulaki $A(B+C) = AB+AC$.

VASTAUS:

119.

Olkoon A neliömatriisi ja olkoot B ja C samantyyppisiä matriiseja. Todista: Jos A on säännöllinen, niin $AB = AC \implies B = C$.

VASTAUS:

120.

Todennäköisyyslaskennassa tarkastellaan ns. Markovin prosesseja, jotka kuvaavat systeemiä, joka voi olla äärellisen monessa eri tilassa. Siirtymistodennäköisyydet tilasta toiseen muodostavat neliömatriisin A, jonka kaikki alkiot ovat ≥ 0 ja jossa vaakariveittäin lasketut summat ovat $= 1$. Muodosta tällaisia matriiseja ja tutki matriisin A^n alkioiden raja-arvoja, kun $n \to \infty$. Esitä hypoteesi alkioiden käyttäytymisestä.

VASTAUS:

121.

Matriisin $\underset{n\times n}{A}$ alkiot ovat $\alpha_{ij} = i^j$. Kirjoita matriisi A ja laske matriisitulo AA^{T} tapauksessa $n = 3$. Laske yleisessä tapauksessa (arvolla n) tulomatriisin AA^{T} kohdassa (i,j) oleva alkio indeksien i ja j funktiona.

VASTAUS:

122.

Olkoot A ja B kokoa 10×10 olevia matriiseja, joiden alkiot ovat $\alpha_{ij} = i + j$, $\beta_{ij} = i - j$. Laske tulomatriisin $C = AB$ alkio γ_{ij} indeksien i, j funktiona.

VASTAUS: $\gamma_{ij} = 385 + 55(i - j) - 10ij$.

123.

Laske $(AB)^k$, $k \in \mathbb{N}$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

VASTAUS:

124.

Muodosta jokin pystyvektori x. Laske $r = x^{\mathrm{T}}x$ ja $u = x/\sqrt{r}$. Mitä r kertoo vektorin x alkioista? Mikä ominaisuus on vektorin u alkioilla? Muodosta matriisi $H = I - 2uu^{\mathrm{T}}$ ja sen käänteismatriisi H^{-1}. Miten nämä suhtautuvat toisiinsa? Onko H symmetrinen tai ortogonaalinen?

VASTAUS:

125.

Osoita, että edellisen tehtävän matriisi H on involutorinen, ts. $HH = I$ riippumatta vektorista x. Mitä tämä tulos sanoo käänteismatriisista?

VASTAUS:

126.

Hae kaikki matriisit B, jotka kommutoivat matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kanssa, ts. joille pätee $AB = BA$.

VASTAUS:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

127.

Osoita, että jos A ja B ortogonaalimatriiseja, niin myös AB ja A^{-1} ovat ortogonaalisia.

VASTAUS:

128.

Olkoon A kokoa 3×3 oleva ortogonaalimatriisi, jonka alkioista tiedetään seuraavaa:

$$\alpha_{11} = \tfrac{3}{7}, \quad \alpha_{12} = -\tfrac{2}{7}, \quad \alpha_{13} > 0, \quad \alpha_{21} < 0, \quad \alpha_{22} = \tfrac{6}{7}.$$

Määritä A ja A^{-1}.

VASTAUS:

129.

Todista, että jos matriisille A pätee $A^{\mathrm{T}} + A = O$ ja käänteismatriisi $(I+A)^{-1}$ on olemassa, niin matriisi $B = (I+A)^{-1}(I-A)$ on ortogonaalinen.

VASTAUS:

130.

Todista, että jokainen ortogonaalinen 2×2-matriisi voidaan kirjoittaa jompaankumpaan seuraavista muodoista:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

VASTAUS:

4.3. Lineaarinen yhtälöryhmä

131.

Totea, että yhtälöryhmän

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_1 & + & \frac{1}{2}\xi_2 & - & \frac{1}{2\sqrt{3}}\xi_3 & = & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_1 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 & + & \frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3 & = & 2 \\ & - & \frac{1}{2}\xi_2 & - & \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_3 & = & 3 \end{cases}$$

kerroinmatriisi on ortogonaalinen ja käytä tätä tietoa hyväksi yhtälöryhmän ratkaisemisessa.

VASTAUS: $x = A^{\mathrm{T}} b = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -1-\sqrt{2} & \frac{-5+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

132.

Olkoon

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & -5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Laske tulo CA. Tutki, voidaanko lineaarinen yhtälöryhmä $Ax = b$ ratkaista kertomalla se vasemmalta matriisilla C. Mitä tällöin saadaan ratkaisuvektoriksi x? Onko kyseessä matriisiyhtälön ratkaisu?

VASTAUS:

133.

Ratkaise Gaussin algoritmilla lineaariset yhtälöryhmät

$$\text{a) } \begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 4 \\ 2\xi_1 + 6\xi_2 + 2\xi_3 = 20 \\ -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 7 \end{cases}, \qquad \text{b) } \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3 = 8 \\ 7\xi_1 - 2\xi_2 - 3\xi_3 = -32 \\ \xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 = 17 \\ -2\xi_1 + 8\xi_2 - 5\xi_3 = 8 \end{cases},$$

$$\text{c) } \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 1 \\ \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 2 \\ \xi_1 - 5\xi_3 = 4 \end{cases}, \qquad \text{d) } \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = -1 \\ -\xi_1 + \xi_2 = 1 \\ 3\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = -3 \end{cases}.$$

VASTAUS:

134.

Ratkaise Gaussin algoritmilla yhtälöryhmä $Ax = b$, kun

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

VASTAUS: a) Ei ratkaisua, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, c) ei ratkaisua,
d) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta + 1 & -\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}\beta + 2 & \alpha & \beta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

135.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & \alpha \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Tutki yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisujen lukumäärää lukujen α, β eri arvoilla.

VASTAUS: Yksi ratkaisu, jos $\beta = 6$, $\alpha \neq 6$; äärettömän monta ratkaisua, jos $\alpha = \beta = 6$; muulloin ratkaisuja ei ole.

136.

Ratkaise yhtälöryhmä $Ax = b$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -5 \\ -22 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

VASTAUS:

137.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Osoita, että yhtälöryhmällä $Ax = b$ ei ole ratkaisua. Tietyssä mielessä (pienimmän neliösumman mielessä) mahdollisimman hyvä ratkaisu (joka ei kuitenkaan — tietenkään — toteuta yhtälöryhmää) saadaan ratkaisemalla matriisiyhtälö $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. Muodosta tämä yhtälöryhmä ja ratkaise se. Piirrä ryhmän yhtälöiden kuvaajat sekä saatu pienimmän neliösumman periaatteen mukainen ratkaisu tasoon $\mathbb{R}^2$.

VASTAUS:

4.4. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$

138.

Tutki avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreiden $\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}7 & -5 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$ lineaarista riippumattomuutta.

VASTAUS: Lineaarisesti riippumattomat.

139.

Tutki, ovatko vektorit $\begin{pmatrix}0 & 2 & -4 & 8\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}6 & 12 & 3 & 3\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}2 & 5 & -1 & 5\end{pmatrix}^T$ lineaarisesti riippumattomia. Voidaanko vektori $\begin{pmatrix}-2 & 0 & -9 & 15\end{pmatrix}^T$ lausua näiden lineaariyhdistelynä? Jos voidaan, niin onko esitys yksikäsitteinen?

VASTAUS: Lineaarisesti riippuvat; voidaan; esitys ei ole yksikäsitteinen.

140.

Osoita, että vektorit $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix}^T$ ja $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Laske vektorin $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$ koordinaatit tässä kannassa.

VASTAUS:

141.

Osoita, että vektorit $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$, $a_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$, $a_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Mitkä ovat vektorin $x = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$ koordinaatit tässä kannassa?

VASTAUS: 0, 2, 1.

142.

Tutki, muodostavatko vektorit

$$a_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\ a_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\ a_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\ a_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan. Voidaanko vektori $x = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T$ lausua näiden lineaariyhdistelynä?

VASTAUS:

143.

Millä lukuja α, β, γ, δ koskevalla ehdolla vektorit $\alpha x + \beta y$ ja $\gamma x + \delta y$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos vektorit x ja y a) ovat, b) eivät ole lineaarisesti riippumattomia?

VASTAUS: a) Jos $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; b) ei millään.

144.

Todista, että jos vektorit $a_1, \dots, a_p$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin myös vektorit $\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_p a_p$ ovat. Todista, että jos $a_1, \dots, a_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin vektorit $\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_p a_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos tulo $\lambda_1 \dots \lambda_p$ on $\neq 0$.

VASTAUS:

145.

Olkoot vektorit $a_1,\dots,a_p$ lineaarisesti riippumattomia. Tutki, ovatko seuraavat vektorisysteemit lineaarisesti riippumattomia:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } a_1,\ a_2+a_1,\ a_3+a_2,\ \dots,\ a_p+a_{p-1},\\
&\text{b) } a_1-a_p,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ \dots,\ a_p-a_{p-1},\\
&\text{c) } a_1,\ \dots,\ a_{j-1},\ a_j+\lambda a_k,\ a_{j+1},\ \dots,\ a_p,\ \text{missä } k\neq j.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) Riippumaton; b) riippuva, c) riippumaton.

4.5. Determinantti

146.

Laske Gaussin algoritmilla, alideterminanttikehitelmää käyttäen ja Sarrus'n säännöllä seuraavat determinantit:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -5 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & -6 \end{vmatrix}.$$

Tarkista tulokset jollakin tietokoneohjelmalla.

VASTAUS: a) 27; b) 0; c) -200.

147.

Laske sekä Gaussin algoritmilla että alideterminanttikehitelmää käyttäen seuraavat determinantit:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Tarkista tulokset jollakin tietokoneohjelmalla.

VASTAUS: a) -2; b) 38; c) ?.

148.

Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}.$$

VASTAUS:

149.

Laske seuraavat determinantit sopivia determinantin laskusääntöjä käyttäen:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\alpha_4 & 1+\alpha_1\alpha_5 & 1+\alpha_1\alpha_6 \\ 1+\alpha_2\alpha_4 & 1+\alpha_2\alpha_5 & 1+\alpha_2\alpha_6 \\ 1+\alpha_3\alpha_4 & 1+\alpha_3\alpha_5 & 1+\alpha_3\alpha_6 \end{vmatrix}.$$

VASTAUS: a) 0; b) 0.

150.

Millä lukuja α ja β koskevilla ehdoilla seuraavat determinantit ovat $= 0$?

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha+2\beta & \alpha+3\beta \\ \alpha+3\beta & \alpha+\beta & \alpha+2\beta \\ \alpha+2\beta & \alpha+3\beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^3 & 1 \end{vmatrix}.$$

VASTAUS: a) $\beta = 0$ tai $\alpha + 2\beta = 0$; b) $\alpha = -1, 0, \frac{1}{2}, 1$.

151.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 6 \\ -13 & -8 & -4 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Laske $\det((-5AA^{\mathrm{T}})^7)$ käyttämällä determinantin laskusääntöjä.

VASTAUS: $-5^{21} \cdot 2^{14} = -\ 7\ 812\ 500\ 000\ 000\ 000\ 000$.

152.

Matriisista $\underset{3\times 3}{A}$ tiedetään, että se ei ole symmetrinen ja että sillä on ominaisuus $A^{\mathrm{T}} = \lambda A$ eräällä skalaarilla λ. Mitä tämän perusteella voidaan päätellä matriisista A ja skalaarista λ?

VASTAUS: $\lambda = -1$, $\det(A) = 0$, matriisin A lävistäjäalkiot ovat $= 0$.

153.

Tutki, millä luvun α arvoilla avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektorit $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(1, \alpha, 1, 1)$, $(1, 1, \alpha, 1)$, $(1, 1, 1, \alpha)$ ovat lineaarisesti riippuvia. Millä luvun α arvoilla vektori $(1, -1, -3, 3)$ voidaan lausua em. vektoreiden lineaariyhdistelynä?

VASTAUS: Vektorit lineaarisesti riippuvia, jos $\alpha = 1$ tai $= -3$; voidaan lausua lineaariyhdistelynä, jos $\alpha \neq 1$.

154.

Muodosta jokin pystyvektori x, jolle pätee $x^{\mathrm{T}}x = 1$, ja tämän avulla matriisi $H = I - 2xx^{\mathrm{T}}$. Laske matriisin H determinantti. Kokeile erilaisia vektoreita x ja esitä hypoteesi determinantista.

VASTAUS:

155.

Eräs tietokone suorittaa keskimäärin miljardi liukulukulaskutoimitusta (yhteen-, vähennys-, kerto- tai jakolaskua) sekunnissa. Kauanko koneella kestää laskea a) 10-rivinen, b) 100-rivinen determinantti 1) suoraan permutaatioihin perustuvan määritelmän avulla, 2) Gaussin algoritmilla?

VASTAUS:

4.6. Käänteismatriisi

156.

Määritä Gaussin algoritmilla ja alideterminanttien avulla A^{-1}, kun

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tarkista tulokset jollakin tietokoneohjelmalla.

VASTAUS: a) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ -1 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

157.

Laske käänteismatriisi matriisille

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

VASTAUS: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

158.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 3 & 1 \\ x-4 & 3 & 2 \\ x-6 & x & 3 \end{pmatrix}.$$

Tutki, millä muuttujan x arvoilla a) matriisilla ei ole käänteismatriisia, b) sen pystyvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

VASTAUS: $x = 0$ tai $x = 3$.

159.

Tutki, millä ehdolla matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

a) pysty-, b) vaakavektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

VASTAUS:

160.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise yhtälöryhmä $Ax = b$.

VASTAUS:

161.

Kuten edellinen tehtävä, mutta matriisin oikean alanurkan alkio onkin 9. Analysoi tilannetta muodostamalla matriisin determinantti ja määrittämällä matriisin lineaarisesti riippumattomien pystyvektoreiden lukumäärä.

VASTAUS:

4.7. Lineaarikuvaus

162.

Lineaarikuvaus $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ kuvaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit x_1, x_2 ja x_3 vektoreille $(0,2,-1)$, $(1,2,3)$ ja $(1,-1,0)$. Laske vektorin $3x_1 - 2x_2 + x_3$ kuva.

VASTAUS: $(-1,1,-9)$.

163.

Voiko kuvaus $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ olla lineaarinen, jos

$$F((0,1,1)) = (1,0,0), \quad F((1,0,1)) = (1,1,0), \quad F((1,-1,0)) = (1,1,1)?$$

VASTAUS: Ei.

164.

Lineaarikuvauksella $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on ominaisuudet $F((1,1)) = (3,-1)$ ja $F((2,-1)) = (1,2)$. Laske kuvauksen matriisi (luonnolllisten kantojen suhteen) ja määritä tämän avulla vektorin $(1,-1)$ kuva.

VASTAUS: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; $\quad \frac{1}{3}(-1,5)$.

165.

Olkoot F ja G lineaarikuvauksia. Todista, että yhdistetty kuvaus $F \circ G$ on myös lineaarikuvaus.

VASTAUS:

166.

Todista, että lineaarikuvaus F on injektio, jos ja vain jos $F(x) = o \implies x = o$.

VASTAUS:

167.

Olkoon F lineaarikuvaus ja vektorit $a_1, \ldots, a_m$ lineaarisesti riippuvia. Todista, että myös vektorit $F(a_1), \ldots, F(a_m)$ ovat lineaarisesti riippuvia.

VASTAUS:

168.

Olkoon F injektiivinen lineaarikuvaus ja vektorit $a_1, \ldots, a_m$ lineaarisesti riippumattomia. Todista, että tällöin myös vektorit $F(a_1), \ldots, F(a_m)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Päteekö tulos, jos F ei ole injektio?

VASTAUS: