10. Toisen asteen käyrien ja pintojen geometriaa

10.1. Ympyrän ja pallon ominaisuuksia

446.

Minkä käyrän muodostavat ne tason E^2 pisteet, joista pisteitä $(-a,0)$ ja $(a,0)$ yhdistävä jana ($a > 0$) näkyy 45° kulmassa?

VASTAUS: Kaksi ympyränkaarta: $x^2+y^2-2ay=a^2$, $y>0$ ja $x^2+y^2+2ay=a^2$, $y<0$.

447.

Osoita, että ne tason pisteet, joiden etäisyydet pisteistä $P_1 \,\widehat{=}\, x_1$ ja $P_2 \,\widehat{=}\, x_2$ ovat suhteessa $k:1$, muodostavat *Apolloniuksen ympyrän*

$$\left\| x - \frac{x_1 - k^2 x_2}{1-k^2} \right\|^2 = \frac{k^2}{(1-k^2)^2} \|x_1 - x_2\|^2 \quad (k \neq 1).$$

VASTAUS:

448.

Määritä ympyrän $\|x\| = 1$ ja pisteen $P_0 \,\widehat{=}\, x_0$ (tulkittuna ympyräksi, jonka säde on $= 0$) kordaali.

VASTAUS: $2x_0^{\mathrm{T}}x - x_0^{\mathrm{T}}x_0 = 1$.

449.

Olkoon c ympyrä $K(x) = 0$ ja olkoon $P_1 \,\widehat{=}\, x_1$ sen ulkopuolella oleva piste. Osoita, että yhtälö $\|x-x_1\|^2 = K(x_1)$ esittää P_1-keskistä ympyrää, joka leikkaa ympyrän c kohtisuorasti. (Tätä kutsutaan ympyrän c *ortogonaaliympyräksi*.)

VASTAUS:

450.

Näytä, että ympyräparvet $x^2+y^2-2sy-c^2=0$ ja $x^2+y^2-2tx+c^2=0$ (parvien parametreina s ja t, c on vakio) leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Piirrä kuvio.

VASTAUS:

451.

Olkoon c ympyrä $K(x) = 0$ ja olkoon $P_1 \,\widehat{=}\, x_1$ sen sisäpuolella oleva piste. Osoita, että yhtälö $\|x-x_1\|^2 = -K(x_1)$ esittää P_1-keskistä ympyrää, joka leikkaa ympyrän c halkaisijansa päätepisteissä. (Tätä kutsutaan ympyrän c *diametraaliympyräksi*.)

VASTAUS:

452.

Olkoon c ympyrä, jonka säde on ρ ja yhtälö $K(x) = 0$. Olkoon $P_1 \,\widehat{=}\, x_1$ sen sisäpuolella oleva piste. Muodosta yhtälö sille P_1-keskiselle ympyrälle, joka leikkaa ympyrän c sen halkaisijan päätepisteissä (ts. jonka diametraaliympyrä c on).

VASTAUS: $\|x-x_1\|^2 = K(x_1) + 2\rho^2$.

453.

Miten muodostetaan yksinkertaisimmin kahden annetun toisiaan leikkaavan ympyrän leikkauspisteiden kautta kulkeva ympyräparvi? Määritä se ympyröiden $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ ja $x^2+y^2-10x-16y+40=0$ leikkauspisteiden kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on suoralla $8x-3y-2=0$.

VASTAUS: Jos ympyröiden yhtälöt ovat $K_1(x)=0$ ja $K_2(x)=0$, niin leikkauspisteiden kautta kulkevan ympyräparven yhtälö on $\alpha K_1(x)+\beta K_2(x)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $\quad x^2+y^2-14x-36y+92=0$.

454.

Näytä, että jos ympyröillä $K_1(x)=0$ ja $K_2(x)=0$ ei ole yhteisiä pisteitä, niin myöskään ympyröillä $K_1(x)+\alpha K_2(x)=0$ ja $K_1(x)+\beta K_2(x)=0$, $\alpha\neq\beta$, ei ole yhteisiä pisteitä.

VASTAUS:

455.

Olkoon pallon yhtälö $K(x)=0$ ja tason yhtälö $L(x)=0$ (missä $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$). Miten muodostetaan pallon ja tason leikkausympyrän kautta kulkevan palloparven yhtälö? Etsi sovellutuksena sen pallon yhtälö, joka kulkee pallon $K(x)=x^{\mathrm{T}}x-1=0$ ja tason $L(x)=a^{\mathrm{T}}x=0$, missä $a=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, leikkausympyrän kautta ja joka sivuaa tasoa $x_2=3$.

VASTAUS: $\alpha K(x)+\beta L(x)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1-2x_2+2x_3-1=0$ tai $x_1^2+x_2^2+x_3^2-8x_1+8x_2-8x_3-1=0$.

456.

Olkoon annettuna kolme palloa, joiden keskipisteet eivät ole samalla suoralla. Osoita, että pallojen kolme parittain otettua radikaalitasoa kulkevat saman suoran, ns. *radikaaliakselin* kautta. Osoita, että radiaakliakseli on kohtisuorassa pallojen keskipisteiden määräämää tasoa vastaan.

VASTAUS:

457.

Olkoot $K_1(x)=0$ ja $K_2(x)=0$ kahden pallon yhtälöt. Osoita, että pallojen $K_1(x)+\alpha K_2(x)=0$ ja $K_1(x)+\beta K_2(x)=0,\ \alpha\neq-1,\ \beta\neq-1,\ \alpha\neq\beta$, radikaalitaso on riippumaton lukujen α, β valinnasta.

VASTAUS:

458.

Osoita, että jokainen ympyrän $x^2+y^2=a^2,\ z=0$ kautta kulkeva pallo leikkaa ortogonaalisesti jokaisen pallon, joka kulkee ympyrän $(x-b)^2+z^2=b^2-a^2,\ y=0$ kautta.

VASTAUS:

10.2. Liittohalkaisijat

459.

Ellipsiä $5x^2+5y^2+6xy-16x-16y=16$ leikataan suorilla, joiden suuntavektori on $\mathbf{t}_1=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Osoita, että ellipsin näistä suorista erottamien jänteiden keskipisteet sijaitsevat samalla suoralla. Mikä on tämän suoran suuntavektori $\mathbf{t}_2$?

VASTAUS:

460.

Totea, että edellisen tehtävän suuntavektorit toteuttavat ehdon $t_1^{\mathrm{T}} A t_2 = 0$, missä t_1 ja t_2 ovat suuntavektoreita vastaavat koordinaattivektorit ja A on ellipsin yhtälön toisen asteen termeistä saatava matriisi.

VASTAUS:

461.

Suora $x = x_0 + \tau v$ leikkaa toisen asteen käyrää $x^{\mathrm{T}} A x + 2b^{\mathrm{T}} x + \omega = 0$; tässä A on symmetrinen 2×2 -matriisi, x, x_0, v ja b kokoa 2×1 olevia pystyvektoreita sekä τ ja ω skalaareja. Lausu leikkauspisteiden koordinaattivektorit suoraa ja käyrää karakterisoivien vakioiden x_0, v, A, b, ω avulla.

VASTAUS: $x = x_0 - \dfrac{x_0^{\mathrm{T}} A x_0 + 2b^{\mathrm{T}} x_0 + \omega}{2(x_0^{\mathrm{T}} A v + b^{\mathrm{T}} v)}\, v.$

462.

Todista, että ellipsin kahden liittohalkaisijan pituuksien neliöiden summa on vakio.

VASTAUS: Vakio $= 4(a^2 + b^2)$.

463.

Määritä suoran a) $e_1^{\mathrm{T}}(Ax + b) = 0$, b) $e_2^{\mathrm{T}}(Ax + b) = 0$ liittohalkaisija toisen asteen käyrän $x^{\mathrm{T}} A x + 2b^{\mathrm{T}} x + \omega = 0$ suhteen. (Tässä $e_1 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{i}$, $e_2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{j}$ ovat ortonormeeratut kantavektorit.)

VASTAUS: Käyrän keskipisteen kautta kulkeva a) e_1-vektorin, b) e_2-vektorin suuntainen suora.

464.

Määritä pinnan

$$2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 16yz + 4zx - 24x - 6y - 6z - 18 = 0$$

vektorin $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaisen halkaisijan liittohalkaisijatason yhtälö.

VASTAUS: $4x - 5y - 2z - 3 = 0$.

465.

Toisen asteen pinnan

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon yz + 2\zeta zx + 2\eta x + 2\vartheta y + 2\kappa z + \omega = 0$$

vektorin $\mathbf{t}$ suuntaisten jänteiden keskipisteet sijaitsevat xy-tason suuntaisessa tasossa. Määritä vektorin $\mathbf{t}$ suunta.

VASTAUS: $(\delta\varepsilon - \beta\zeta)\mathbf{i} + (\delta\zeta - \alpha\varepsilon)\mathbf{j} + (\alpha\beta - \delta^2)\mathbf{k}$.

10.3. Polaariteoria

466.

Osoita, ettö kaksoissuhde on riippumaton suoran parametriesityksessä käytetyn suuntavektorin pituudesta.

VASTAUS:

467.

Osoita laskemalla, että jos pisteistö P_1, P_2, P_3, P_4 on harmoninen, niin myös pisteistö P_3, P_4, P_1, P_2 on.

VASTAUS:

468.

Osoita, että avaruuden E^3 pisteet $P_1 \mathrel{\widehat{=}} (1,0,-1)$, $P_2 \mathrel{\widehat{=}} (3,-4,5)$ ja $P_3 \mathrel{\widehat{=}} (8,-14,20)$ ovat samalla suoralla. Määritä piste P_4 siten, että pisteistö P_1,P_2,P_3,P_4 on harmoninen.

VASTAUS: $P_4 \mathrel{\widehat{=}} (\frac{13}{6}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{2})$.

469.

Määritä suoran $x+2y=3$ napa a) käyrän $3x^2+y^2=1$, b) käyrän $y=x^2$ suhteen. Piirrä kuvio.

VASTAUS: a) $(\frac{1}{9}, \frac{2}{3})$; b) $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$.

470.

Määritä käyrän $3x^2+5y^2+4xy-7x-8y-3=0$ tangentti ja normaali pisteessä $(2,1)$.

VASTAUS: Tangentti $9x+10y-28=0$, normaali $10x-9y-11=0$.

471.

Millä ehdolla toisen asteen käyrä $\alpha x^2+\beta y^2+2\gamma xy+2\delta x+2\varepsilon y+\omega=0$ sivuaa x-akselia origossa?

VASTAUS: $\delta=\omega=0,\ \varepsilon\neq 0$.

472.

Tarkastellaan toisen asteen käyrää $x^2-xy-y=0$. a) Määritä tangenttijänteen avulla pisteestä $(1,-2)$ käyrälle piirrettyjen tangenttien yhtälöt. b) Määritä suoran $x+2y+3=0$ suuntaisten käyrän tangenttien yhtälöt. Piirrä kuvio.

VASTAUS: a) $(\sqrt{5}+1)x+2y+3-\sqrt{5}=0,\ (\sqrt{5}-1)x-2y-3-\sqrt{5}=0$; b) $x+2y+5+2\sqrt{6}=0,\ x+2y+5-2\sqrt{6}=0$.

473.

Olkoon s pisteen $(2,1)$ polaari ellipsin $5x^2+5y^2+6xy-4x+4y=4$ suhteen. Määritä ellipsille halkaisija, jonka liittohalkaisija on suoran s suuntainen.

VASTAUS: $2x-y-3=0$.

474.

Määritä käyrän $x^2-2y^2+4xy-6x+2y=0$ origoon asetetun tangentin suuntaisten jänteiden liittohalkaisija. Piirrä kuvio.

VASTAUS: $7x-4y=0$.

475.

Määritä suoran $b^{\mathrm{T}}x+\omega=0$ napa käyrän $x^{\mathrm{T}}Ax+2b^{\mathrm{T}}x+\omega=0$ suhteen.

VASTAUS: Origo (ainakin).

476.

Minkä käyrän muodostavat ympyrän $x^{\mathrm{T}}x=\alpha^2$ tangenttien navat ympyrän $x^{\mathrm{T}}x=\beta^2$ suhteen?

VASTAUS: Ympyrän $x^{\mathrm{T}}x = \beta^4/\alpha^2$.

477.

Yhtälö $(b_1^{\mathrm{T}}x+\omega_1)(b_2^{\mathrm{T}}x+\omega_2)=0$ esittää erästä toisen asteen käyrää. Osoita, että tämän polaari pisteen $P_0 \mathrel{\widehat{=}} x_0$ suhteen voidaan kirjoittaa

$$(b_1^{\mathrm{T}}x_0+\omega_1)(b_2^{\mathrm{T}}x+\omega_2)+(b_1^{\mathrm{T}}x+\omega_1)(b_2^{\mathrm{T}}x_0+\omega_2)=0.$$

Tutki, minkä tyyppinen toisen asteen käyrä voi olla kyseessä ja millaisia polaareja saadaan pisteen P_0 sijainnista riippuen.

VASTAUS: Käyrä voi olla kaksi leikkaavaa suoraa, kaksi yhdensuuntaista suoraa tai yksi suora.

478.

Määritä tason $ax+by+cz+d=0$ napa pinnan $Ax^2+2Byz+C=0$ suhteen.

VASTAUS: $(\frac{aC}{dA}, \frac{cC}{dB}, \frac{bC}{dB})$.

479.

Määritä ne pinnan $z=xy$ pisteet, joihin asetetut normaalit muodostavat 45° kulman z-akselin kanssa.

VASTAUS: Pinnan ja lieriön $x^2+y^2=1$ leikkauskäyrä: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\cos t\sin t,\ t\in[0,2\pi]$.

480.

Millä ehdolla toisen asteen pinta

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\delta xy+2\varepsilon yz+2\zeta zx+2\eta x+2\vartheta y+2\kappa z+\omega$$

sivuaa xy-tasoa origossa? Millä ehdolla origo on käyrän ja xy-tason ainoa yhteinen piste?

VASTAUS: $\eta=\vartheta=\omega=0,\ \kappa\neq 0$; $\quad \eta=\vartheta=\omega=0,\ \alpha\beta-\delta^2>0$.

10.4. Viivoitin- ja pyörähdyspinnoista

481.

Johda sen pinnan yhtälö, joka muodostuu, kun hyperbeli $x^2-2z^2=1,\ y=0$ pyörähtää suoran $x=0,\ y=1$ ympäri.

VASTAUS: $x^2+y^2-2z^2-2y-1=0$.

482.

Johda sen kartion yhtälö, joka syntyy, kun x-akseli pyörähtää suoran $x=y=z$ ympäri.

VASTAUS:

483.

On annettuna kaksi suoraa: $x=y,\ z=0$ ja $x=y=z$. Johda sen kartion yhtälö, joka syntyy, kun a) edellinen suora pyörähtää jälkimmäisen ympäri, b) jälkimmäinen pyörähtää edellisen ympäri.

VASTAUS: a) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx=0$; $\quad$ b) $x^2+y^2+4z^2-6xy=0$.

484.

Kartio, jonka kärki on pisteessä $(0,1,1)$ leikkaa xy-tason pitkin paraabelia $x^{=}2y$. Määritä kartion ja xz-tason leikkauskäyrän eksentrisyys.

VASTAUS: $\sqrt{3}$.

485.

Johda sen kartion yhtälö, jonka kärki on origossa ja jonka vaippa kulkee yhtälöiden

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

määrittämän käyrän kautta.

VASTAUS: $xy+yz+zx=0$.

486.

Ellipsin $y^2+4z^2=4,\ x=0$ pisteet projisioidaan vektorin $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ suuntaisesti xz-tasolle. Määritä muodostuvan ellipsin puoliakselien pituudet.

VASTAUS: $a^2=\frac{8}{9-\sqrt{65}},\ b^2=\frac{8}{9+\sqrt{65}}$.

487.

Johda sen pyörähdyslieriön yhtälö, jolla on emäsuorana $x=y=z$ ja jonka akseli kulkee pisteen $(1,-1,-1)$ kautta.

VASTAUS: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-4x+2y+2z=0$.

488.

Määritä sen elliptisen lieriön yhtälö, jonka vaippa sisältää ympyrät $x^2+y^2=1,\ z=0$ ja $x^2+y^2-4x+2y+4=0,\ z=1$.

VASTAUS: $x^2+y^2+5z^2+2yz-4zx-1=0$.

489.

Suoran $x=t,\ y=t,\ z=0$ jokaisen pisteen kautta asetetaan vektorin $\mathbf{i}-\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ suuntainen suora. Määritä syntyvän viivoitinpinnan yhtälö ja laatu.

VASTAUS: $x^2-y^2=4z$, hyperbolinen paraboloidi.

490.

Pinnalle $z=xy$ asetetaan vektorin $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ suuntainen sivuava lieriö. Määritä sen ja xy-tason leikauskäyrä. Minkätyyppinen lieriö on kyseessä?

VASTAUS: $x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$; parabolinen.

491.

Määritä pitkin suoria

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2=0 \\ 4y+3z=0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} y-3=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$$

liukuvan suoran muodostama pinta.

VASTAUS: $36x^2+16y^2-9z^2=144$.

492.

Pisteet $P_1 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_1 \mathrel{\widehat{=}} (1,0,1)$, $P_2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_2 \mathrel{\widehat{=}} (0,1,-1)$, $P_3 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_3 \mathrel{\widehat{=}} (-1,0,1)$, $P_4 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_4 \mathrel{\widehat{=}} (0,-1,-1)$ muodostavat avaruusnelikulmion, so. nelikulmion, joka ei sijaitse tasossa. Piste A kulkee suoraa P_1P_2 pitkin tasaisella nopeudella pisteestä P_1 pisteeseen P_2 ja piste B samanaikaisesti suoraa P_4P_3 pitkin tasaisella nopeudella pisteestä P_4 pisteeseen P_3. Etsi sen pinnan yhtälö, jonka suora AB liikkuessaan muodostaa.

VASTAUS:

493.

Suora kulkee pisteen $(1,0,0)$ kautta ja sen suuntavektori on $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Suora pyörähtää z-akselin ympäri, jolloin syntyy toisen asteen pinta. Määritä tämän yhtälö. Minkätyyppinen pinta on kyseessä?

VASTAUS:

494.

Osoita, että suorat $x=1,\ y+z=0$ ja $x=1,\ y-z=0$ sijaitsevat kokonaisuudessaan edellisen tehtävän pinnalla. Leikkaavatko ne toisiaan?

VASTAUS:

495.

Osoita, että emäsuoraparveen (parametrina s)

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=s(1+\dfrac{x}{a}) \\ s(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c})=1-\dfrac{x}{a} \end{cases}, \qquad s\in\mathbb{R}.$$

kuuluvat kolme suoraa eivät ole saman tason suuntaisia.

VASTAUS:

496.

Millä vakion a arvoilla pinnalla $x^2+y^2-a^2z^2=a^2$ on emäsuoria, jotka leikkaavat toisensa kohtisuorasti xy-tasossa?

VASTAUS: $a=\pm1$.

497.

Määritä pinnan $x^2-4y^2=8z$ pisteen $(6,1,4)$ kautta kulkevien emäsuorien välisen kulman kosini.

VASTAUS: $\frac{11}{3\sqrt{21}}$.

498.

Osoita, että pinta $x^2-z^2+y(x-z)=2y+3z$ on satulapinta ja määritä origon kautta kulkevien emäsuorien välisen kulman kosini.

VASTAUS: $\frac{15}{\sqrt{238}}$.

499.

Määritä pinnan $x^2 - 2yz = 1$ emäsuoraparvet ja erityisesti pisteen $(-3,2,2)$ kautta kulkevien emäsuorien suuntavektorit.

VASTAUS: $x-1 = 2sy,\ s(x+1) = z$ sekä $x+1 = 2ty,\ t(x-1) = z$; $\quad 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ sekä $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.