1. Differentiaaliyhtälö

1.1. Peruskäsitteet

1.

Määrää seuraavien differentiaaliyhtälöiden laatu (tavallinen vai osittainen, normaalimuotoinen vai ei, kertaluku).

a) $xy'' + 2y\sin x = e^x$,
b) $y' + \sin(x+y) = \sin x$,
c) $y'(y(x)) = y(x)$,
d) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

VASTAUS: a) tavallinen, ei, 2, b) tavallinen, ei, 1, c) tavallinen, ei, 1, d) osittainen, ei, 2.

2.

Näytä, että $y = 2x + Ce^x$ on differentiaaliyhtälön $y' = y + 2(1-x)$ yleinen ratkaisu. Määritä ratkaisukäyrä, joka kulkee pisteen a) $(0,1)$, b) $(0,-1)$ kautta. Piirrä käyrät.

VASTAUS: a) $y = 2x + e^x$; b) $y = 2x - e^x$.

3.

Osoita, että $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ on differentiaaliyhtälön $y'' + 4y' + 5y = 0$ ratkaisu. Määritä alkuehdon $y(0) = y'(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

VASTAUS:

4.

Osoita, että $y = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x + C_1 e^x + C_2 e^{6x}$ on differentiaaliyhtälön $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ ratkaisu.

VASTAUS:

5.

Osoita, että $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$ on differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ ratkaisu.

VASTAUS:

6.

Osoita, että differentiaaliyhtälöllä ${y'}^2 = 4y$ on ratkaisuna $y = (x+C)^2$ ja $y = 0$; tässä C on vakio. Millaisia ovat ratkaisukäyrien kuvaajat? Mitä muita ratkaisuja differentiaaliyhtälöllä on?

VASTAUS: Jokainen x-akselin piste on ratkaisujen haarautumispiste.

7.

Näytä, että funktiopari $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $z = (C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x$ toteuttaa differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y' - z' = y \\ 2y' - z' = z \end{cases} .$$

VASTAUS:

8.

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio ja olkoon y differentiaaliyhtälön $y' = f(x,y)$ alkuehdon $y(x_0) = y_0$ toteuttava ratkaisu. Johda lauseke derivaatalle $y''(x_0)$.

VASTAUS:

9.

Määritä alkuarvoprobleeman $xy' = x+y$, $y(1) = 1$ ratkaisukäyrän kaarevuus alkuehtopisteessä.

VASTAUS: $1/5^{3/2}$.

10.

Yhtälöllä $y' = y$ on ratkaisuna $y = e^x$. Osoita, että sen jokainen muu ratkaisu poikkeaa tästä vain kerrannaisella vakiolla tarkastelemalla muotoa $y = u(x)e^x$ olevaa ratkaisua.

VASTAUS: Sijoita differentiaaliyhtälöön $y = ue^x$ ja johda ehto funktiolle u.

11.

Olkoon f jatkuva kahden muuttujan funktio. Näytä, että yhtälön $y' = yf(x,y)$ ratkaisukäyrät joko sivuavat x-akselia tai eivät kosketa sitä lainkaan.

VASTAUS: Tutki, minkä muodon differentiaaliyhtälö saa x-akselin pisteessä $(x,0)$.

12.

Olkoot funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaatat olemassa. Laske alkuarvoprobleeman $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisun $y(x)$ kolmannen asteen Taylorin polynomi kehityskeskuksena x_0.

VASTAUS: $T_3(x,x_0) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(f_x + f_y f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}(f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^3$.

13.

Laske alkuarvoprobleeman $yy'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ratkaisun neljännen asteen Maclaurinin polynomi. Sijoita tulos differentiaaliyhtälöön.

VASTAUS: $T_4(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4$,
$T_4T_4'' + T_4' + T_4 = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{48}x^6$.

14.

Laske alkuarvoprobleeman $y'' = yy' - x^2$, $y(0) = y'(0) = 1$ ratkaisun neljännen asteen Maclaurinin polynomi. Sijoita tulos differentiaaliyhtälöön.

VASTAUS: $T_4(x,0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4$,
$T_4'' - T_4T_4' + x^2 = -\frac{7}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 - \frac{17}{24}x^5 - \frac{7}{24}x^6 - \frac{1}{16}x^7$.

15.

Tutki seuraavien differentiaaliyhtälöiden tai alkuarvoprobleemoiden ratkaisemista jonkin symbolisen tietokoneohjelman avulla:

a) $y' = xy$, b) $y' = xy$, $y(1) = 2$, c) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$,
d) $y'' - 4y' + 13y = x^4$, e) $yy'' = y'^2 + yy'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, f) $y'' + xy = 0$.

VASTAUS:

16.

Kirjoita differentiaaliyhtälö

$$3x^2+6xy^2+(6x^2y+4y^3)y'=0$$

muotoon $y' = f(x,y)$. Tutki yhtälön ratkaisukäyriä numeerisesti.

VASTAUS:

1.2. Ratkaisukäyräparvet

17.

Muodosta suoraparven $y=Cx+2C^2$ (C parametri) differentiaaliyhtälö. Yhtälöllä on erikoisratkaisuna eräs toisen asteen polynomi; määritä tämä. Piirrä muutamien yksityisratkaisujen sekä erikoisratkaisun kuvaaja. Miten nämä suhtautuvat toisiinsa? Tarkista väitteesi laskemalla.

VASTAUS: $y=xy'+2y'^2$, $y=-\frac{1}{8}x^2$. Paraabeli on suoraparven verhokäyrä.

18.

Johda sen käyräparven differentiaaliyhtälö, johon kuuluvat kaikki xy-tason R-säteiset ympyrät. (Parvella on siis kaksi parametria: ympyrän keskipisteen koordinaatit. R on vakio.) Mitä saatu yhtälö ilmaisee parven käyrien kaarevuussäteistä?

VASTAUS:

19.

Etsi käyräparven $y=(1+C_1^2)\ln(x+C_1)-C_1x+C_2$ differentiaaliyhtälö.

VASTAUS: $(x^2+1)y''+y'^2+1=0$.

20.

Etsi käyräparven $x=C_1e^y+C_2e^{-y}+3$ differentiaaliyhtälö.

VASTAUS: $y''+(x-3)y'^3=0$.

21.

Johda sen käyräparven differentiaaliyhtälö, johon kuuluvat kaikki x-akselia sivuavat ympyrät.

VASTAUS: $(yy''+1+y'^2)^2=(1+y'^2)^3$.

22.

Muodosta tason kaikkien kartioleikkausten (so. toisen asteen käyrien) differentiaaliyhtälö.

VASTAUS: $9(y'')^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40(y''')^3=0$.

23.

Muodosta tason kaikkien paraabelien (akselisuunnasta riippumatta) differentiaaliyhtälö.

VASTAUS: $3y''y^{(4)} - 5(y''')^3 = 0$.

24.

Tutki isokliinien avulla differentiaaliyhtälön $y' = x + y$ ratkaisukäyrien käyttäytymistä.

VASTAUS: Isokliinit $y = -x + p$.

25.

Tutki isokliinien avulla differentiaaliyhtälön $xy' = x + y$ ratkaisukäyrien käyttäytymistä.

VASTAUS: Isokliinit $y = (p-1)x$.

26.

Olkoot f ja sen osittaisderivaatat f_x ja f_y jatkuvia. Näytä, että jos yhtälön $y' = f(x,y)$ ratkaisukäyrällä on käännepiste, niin se sijaitsee käyrällä

$$f_x(x,y) + f_y(x,y)\,f(x,y) = 0.$$

Osoita edelleen, että tämän käyrän pisteissä ratkaisukäyrä ja isokliini sivuavat toisiaan.

VASTAUS:

1.3. Normaaliryhmä

27.

Palauta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $yy'' + xy' = 0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi $Y' = F(x,Y)$. Millainen vektoriarvoinen funktio F on?

VASTAUS: $F(x,(y_1,y_2)) = (y_2,\ -xy_2/y_1)$.

28.

Kappaleen (planeetan) liikettä keskeisvoimakentässä hallitsee Newtonin lakien mukainen differentiaaliyhtälö

$$\mathbf{r}'' = -a\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

missä pilkut tarkoittavat derivaattoja ajan suhteen, $\mathbf{r}$ on paikkavektori, $r = |\mathbf{r}|$ tämän pituus ja a vakio. Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä on tasoliike, jolloin siis $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$. Hajota differentiaaliyhtälö komponenttifunktioita $x(t)$ ja $y(t)$ koskevaksi kahden yhtälön ryhmäksi ja palauta tämä neljän yhtälön ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ottamalla nopeuskomponentit uusiksi tuntemattomiksi funktioiksi.

VASTAUS: $x' = u,\ y' = v,\ u' = -ax/(x^2+y^2)^{3/2},\ v' = -ay/(x^2+y^2)^{3/2}$, missä u ja v ovat nopeuden komponentit.

29.

Kaksi yksikön suuruista massaa on kiinteästi sidottu pisteisiin $(-1,0)$ ja $(1,0)$. Näiden aiheuttamassa gravitaatiokentässä liikkuu kolmas massa. Kirjoita Newtonin lakien mukainen liikeyhtälö ja muodosta vastaava normaaliryhmä $u' = f(t,u)$, missä u on nelikomponenttinen pystyvektori ja t aika. Oletetaan, että kyseessä on tasoliike.

VASTAUS: