2. Tavallisen differentiaaliyhtälön yleisiä ratkaisumenetelmiä

2.1. Ensimmäisen kertaluvun yhtälöt

30.

Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1.$$

Piirrä muutama yleisen ratkaisun kuvaaja. Minkä nimisistä käyristä on kyse?

VASTAUS: $y = e^{-x^2}$, kellokäyrä.

31.

Ratkaise separoimalla differentiaaliyhtälö

$$9yy' + 4x = 0.$$

Piirrä ratkaisukäyriä.

VASTAUS: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C$.

32.

Ratkaise separoimalla differentiaaliyhtälö

$$y' = 1 + y^2.$$

VASTAUS: $y = \tan(x + C)$.

33.

Ratkaise separoimalla alkuarvotehtävä

$$y' = -\frac{y}{x-3}, \quad y(-1) = 1.$$

VASTAUS: $y = -\frac{4}{x-3}$, missä $x < 3$.

34.

Ratkaise separoimalla alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{2x}{1+2y}, \quad y(2) = 0.$$

VASTAUS: $y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4x^2 - 15})$.

35.

Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' + 5x^4y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

VASTAUS: $y = \frac{1}{x^5+1}$.

36.

Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(1) = 3.$$

VASTAUS: Hyperbelin $y^2 - x^2 = 8$ ylempi haara.

37.

Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut ja piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2y' = y^2, & \text{b) } y' = (1-y)^2, & \text{c) } y' = (1+y)(y-1), \\ \text{d) } y' = \sqrt{y-3}, & \text{e) } (1+x)y' = 1+y, & \text{f) } 1+y^2-xy' = 0, \\ \text{g) } (1+x^3)y' = x^2y, & \text{h) } (1-x^2)y' = 1-y^2, & \text{i) } y'+y^2 = 1. \end{array}$$

VASTAUS: a) $y = Cx/(x+C)$; b) $y = 1+C/(1-Cx)$;
c) $y = (1+Ce^{2x})/(1-Ce^{2x})$; d) $y = 3+\frac{1}{4}(x-C)^2,\ x \geq C$;
e) $y = -1+C(x+1)$; f) $y = \tan\ln(Cx)$; g) $y = C\sqrt[3]{1+x^3}$;
h) $y = (Cx+1)/(x+C)$; i) $y = \tanh(x+C)$.

38.

Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y' = e^{|x|},\ y(-1) = -1, & \text{b) } y' = \sin|x|,\ y(-\pi) = 0, & \text{c) } y'\,\overline{\text{arc}}\tan y = 1,\ y(1) = 1, \\ \text{d) } y'\sin x = y\ln y,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1, & \text{e) } (1+e^x)yy' = e^x,\ y(1) = 1, & \text{f) } \cos^2 x\cos(\ln y)y' = y,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1. \end{array}$$

VASTAUS: a) $y = e-1-e^{-x}$, kun $x \leq 0$ ja $y = e-3+e^x$, kun $x \geq 0$;
b) $y = 1+\cos x$, kun $x \leq 0$ ja $y = 3-\cos x$, kun $x \geq 0$;
c) $x = 1-\frac{\pi}{4}+y\,\overline{\text{arc}}\tan y-\frac{1}{2}\ln[\frac{1}{2}(1+y^2)]$;
d) $y = 1$; e) $y = \left(1+2\ln\dfrac{1+e^x}{1+e}\right)^{1/2}$; f) $y = e^{\overline{\text{arc}}\sin(\tan x-1)}$.

39.

Määritä ja piirrä differentiaaliyhtäln $y'^3 = y$ yleinen ratkaisu. Onko yhtälöllä erikoisratkaisuja?

VASTAUS: $y = [\frac{2}{3}(x+C)]^{3/2}$; $y = 0$.

40.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'^2 = 4y$. Onko yhtälöllä erikoisratkaisuja? Onko olemassa ehdot $y(-1) = 1$, $y(2) = 1$ toteuttavaa ratkaisua?

VASTAUS:

41.

Etsi ne differentiaaliyhtälön $y' = 2x|y-1|$ ratkaisukäyrät, jotka sivuavat x-akselia.

VASTAUS: $y = 1 - e^{-x^2}$.

42.

Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

$$\text{a) } (x+y)^2 y' = 1, \quad \text{b) } y' = (2x+y+3)^2, \quad \text{c) } y' = \cos(x+y).$$

VASTAUS: a) $x+y = \tan(y+C)$; b) $y = -2x-3+\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x+C)$; c) $\tan\frac{x+y}{2} = x+C$.

43.

Ratkaise yhtälö

$$y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}.$$

VASTAUS: $y = x\tan(\ln x + C)$.

44.

Ratkaise yhtälö

$$xyy' = x^2+y^2.$$

VASTAUS: $y = \pm x\sqrt{C+2\ln x}$.

45.

Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisut tai integraalit ja piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia:

$$\text{a) } y' = \frac{y}{x-y}, \qquad \text{b) } y' = \frac{y}{y+3x}, \qquad \text{c) } y' = \frac{x}{y}+\frac{y}{x},$$
$$\text{d) } (2x^2+y^2)y' = 2xy, \qquad \text{e) } xy' = y + x\tan\frac{y-x}{x}, \quad \text{f) } xy' = y\ln\frac{y}{x},$$
$$\text{g) } 3x(\cosh\frac{y}{x})y' = 2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}.$$

VASTAUS: a) $x = -y\ln(Cy)$; b) $x = -y/2 + Cy^3$; c) $y^2 = 2x^2\ln(Cx)$; d) $x^2 = y^2\ln(Cy)$;
e) $\sin\dfrac{y-x}{x} = Cx$; f) $y = xe^{Cx+1}$; g) $y = x\,\mathrm{arsinh}(C\sqrt[3]{x^2})$.

46.

Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat:

$$\text{a) } xy' = x\exp(-\frac{x+y}{x}) + y,\ y(1) = -1, \quad \text{b) } y' = \frac{1}{x}\ln\left[\left(\frac{ey}{x}\right)^y\right],\ y(1) = 1,$$
$$\text{c) } y' = \frac{|x|+(x+y)}{|y|-(x-y)},\ y(2) = 0.$$

VASTAUS: a) $y = x\ln(\ln(ex))$; b) $y = x$;
c) $y = 4/x - x$, kun $0 < x \le 2$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{16-3x^2}-x)$, kun $2 \le x \le 4/\sqrt{3}$.

47.

Piirrä differentiaaliyhtälön $xy' = x + y$ suuntakenttä. Etsi yhtälön ratkaisu. Piirrä suuntakenttään alkuehdon $y(1) = 1$ toteuttava ratkaisukäyrä.

VASTAUS:

48.

Etsi yhtälön

$$(x + x\cos\frac{y}{x})y' = x + y + y\cos\frac{y}{x}$$

yleinen ratkaisu parametrimuodossa $x = x(z),\ y = y(z)$.

VASTAUS: $x = Ce^{z+\sin z}$, $y = Cze^{z+\sin z}$.

49.

Totea differentiaaliyhtälö $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ tasa-asteiseksi ja ratkaise se tähän tilanteeseen sopivalla sijoituksella. Mitä mahdetaan tarkoittaa, kun yhtälöä kutsutaan erään *ympyräparven* differentiaaliyhtälöksi?

VASTAUS:

50.

Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikkialla jatkuvasti derivoituva ja $\neq 0$. Etsi yhtälön

$$f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(y' - \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

yleinen integraali.

VASTAUS: $f(y/x) = Cx$.

51.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $e^y y' = x + e^y - 1$ sijoituksella $u = x + e^y$.

VASTAUS: $y = \ln(Ce^x - x)$.

52.

Piirrä suuntakenttä differentiaaliyhtälölle $e^y y' = x + e^y - 1$ ja tähän joitakin ratkaisukäyriä. Ovatko ratkaisukäyrät määriteltyjä kaikilla muuttujan x arvoilla?

VASTAUS:

53.

Ratkaise alkuarvoprobleema $e^y y' = x + e^y - 1$, $y(0) = a$ sijoituksella $u = x + e^y$. Mikä ehto vakion a on täytettävä, jotta ratkaisufunktio olisi määritelty kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$? Jos a ei täytä tätä ehtoa, funktiolla on singulariteetti jossakin pisteessä; millaisesta yhtälöstä tämä saadaan? Vrt. laskusi tuloksia edellisen tehtävän kuvioon.

VASTAUS: $y = \ln(Ce^x - x)$.

54.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $1 + y^2 + xyy' = 0$ sopivalla sijoituksella.

VASTAUS:

55.

Tutki seuraavien yhtälöiden muuntumista muuttujien vaihdossa $x = t^a$, $y = z^b$. Valitse vakioille a ja b arvot siten, että yhtälöistä tulee tasa-asteisia ja ratkaise ne.

$$\text{a) } 2(x^2 - xy^2)y' + y^3 = 0, \quad \text{b) } (x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0.$$

VASTAUS: a) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{z^3}{tz^2 - t^3}$, $y^2 = 2x\ln(Cy)$; b) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2z^3}{tz^2 - t^3}$, $x^2y^2 + 1 = Cy$.

56.

Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}, \quad \text{b) } \frac{dy}{dx} = \frac{-x + 4y - 11}{3x + 2y - 9}, \quad \text{c) } \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2.$$

VASTAUS: a) $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$; b) $\sqrt{7}\,\overline{\text{arc}}\tan\dfrac{-x + 4y - 11}{\sqrt{7}(x - 1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2y^2 - xy + x - 11y + 16) = C$;
c) $2\,\overline{\text{arc}}\tan\dfrac{y + 2}{x - 3} + \ln|y + 2| = C$.

57.

Osoita, että yhtälön

$$(ax + by + c_1)y' + bx - ay + c_2 = 0$$

integraalikäyrät ovat logaritmisia spiraaleja.

VASTAUS:

58.

Osoita differentiaaliyhtälöt

$$\text{a) } 3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0, \quad \text{b) } e^{-y} + (1 - xe^{-y})y' = 0,$$
$$\text{c) } 2x\cos^2 y + (2y - x^2\sin 2y)y' = 0$$

eksakteiksi ja ratkaise ne (muodosta yleiset integraalit). Piirrä suuntakentät ja ratkaisukäyriä.

VASTAUS: a) $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$; b) $y + xe^{-y} = C$; c) $x^2\cos^2 y + y^2 = C$.

59.

Totea, että differentiaaliyhtälöllä

$$(3x^2 - y^2 - 3)y' + 2xy = 0$$

on integroiva tekijä y^2. Ratkaise yhtälö ja piirrä sen ratkaisukäyriä.

VASTAUS:

60.

Totea, että differentiaaliyhtälö $x^2y' - 2xy + 3 = 0$ ei ole eksakti, mutta siitä voidaan saada eksakti kertomalla se muotoa $F(x)$ olevalla integroivalla tekijällä. Ratkaise yhtälö tällä tavalla.

VASTAUS: $y = Cx^2 + 1/x$.

61.

Differentiaaliyhtälöllä

$$(2xy - y^2 - y)dx + (2xy - x^2 - x)dy = 0$$

on muotoa $F(x+y)$ oleva integroiva tekijä. Ratkaise yhtälö.

VASTAUS: $xy = C(x+y+1)^3$.

62.

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Osoita, että a) jos $(P_y - Q_x)/Q$ on pelkästään muuttujan x funktio, niin yhtälöllä on muotoa $F(x)$ oleva integroiva tekijä, b) jos $(P_y - Q_x)/P$ on pelkästään muuttujan y funktio, niin yhtälöllä on muotoa $F(y)$ oleva integroiva tekijä.

VASTAUS:

63.

Ratkaise edellisen tehtävän menettelyllä differentiaaliyhtälöt

$$\begin{array}{ll} \text{a) } xy^2 + y - xy' = 0, & \text{b) } -2xy + (y^2 + 3a^2 - 3x^2)y' = 0, \\ \text{c) } 1 - x^2y + x^2(y-x)y' = 0, & \text{d) } \cos y + \cos x \cos(x+y)y' = 0. \end{array}$$

VASTAUS: a) $y = 2x/(C - x^2)$; b) $(a^2 - x^2)y^3 + \frac{1}{5}y^5 = C$;
c) $y^2 - 2xy - 2/x = C$; d) $\tan x \cos y + \sin y = C$.

64.

Etsi ne käyrät, joilla käyrän normaalin ja x-akselin leikkauspisteen etäisyys normaalin kantapisteestä (käyrällä) on vakio a.

VASTAUS: $(x - C)^2 + y^2 = a^2$, $y = \pm a$.

65.

Määritä ne käyrät, joille y-akselin, käyrän tangentin ja sivuamispisteeseen piirretyn paikkavektorin muodostama kolmio on tasakylkinen.

VASTAUS: $y = C/x$, $y = \frac{1}{2}(Cx^2 - 1/C)$, $(x - C)^2 + y^2 = C^2$.

66.

Erään radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus on likimain verrannollinen sen määrään. Aineen havaittiin vähentyneen 10 prosenttia 24 tunnissa. Laske puoliintumisaika, so. aika, missä aineen määrä on vähentynyt puoleen alkuperäisestä. Muodosta aluksi differentiaaliyhtälö ainemäärää hetkellä t kuvaavalle funktiolle $m(t)$.

VASTAUS: $T_{1/2} = 24\frac{\ln 0.5}{\ln 0.9} \approx 158$ h.

67.

Utopian valtakunnassa väestö haluaa sitä vähemmän hyödykkeitä, mitä enemmän se on jo niitä hankkinut. Niinmuodoin elintason nousu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon. Tutki, kasvaako elintaso rajatta Utopiassa. Voidaanko tällä mallilla kuvata Utopian elintasoa hamasta muinaisuudesta kaukaiseen tulevaisuuteen?

VASTAUS: $y(t) = \sqrt{kt + C}$, missä y on elintaso ja k verrannollisuuskerroin.

68.

Oletetaan, että syntyvyys populaatiossa on suoraan verrannollinen populaation kokoon ja kuolleisuus keskinäisen kilpailun johdosta suoraan verrannollinen yksilöiden välisten suhteiden (yksilöparien) määrään. Osoita, että tämä johtaa populaatiomalliin

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2,$$

missä p on populaation koko ja $\alpha,\ \beta > 0$ ovat vakioita. Ratkaise populaation käyttäytyminen, kun alkuehtona on $p(0) = p_0$. Oletetaan, että $\alpha - \beta p_0 > 0$. Onko populaatiolla maksimikokoa?

VASTAUS:

69.

Säiliössä on 100 litraa suolaliuosta, joka sisältää aluksi 5 kg suolaa. Säiliöön tuodaan nopeudella 5 l/min suolaliuosta, jossa on suolaa 30 g/l. Samalla nopeudella säiliöstä virtaa ulos liuosta. Oletetaan, että liuosta sekoitetaan niin hyvin, että se kaiken aikaa pysyy homogeenisena. Paljonko säiliössä on suolaa tunnin kuluttua?

VASTAUS: Noin 3100 g.

70.

Kappaleen putoamista vastustakoon nopeuden neliöön verrannollinen voima, jolloin nopeus $v(t)$ toteuttaa liikeyhtälön

$$m\frac{dv}{dt} = mg - av^2;$$

tässä t on aika, m, g ja a positiivisia vakioita. Ratkaise yhtälö alkuehdolla $v(0) = v_0$ ja määritä $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Mikä on raja-arvon fysikaalinen merkitys?

VASTAUS: $v = \sqrt{\frac{mg}{a}}\frac{\sqrt{mg}+v_0\sqrt{a}-(\sqrt{mg}-v_0\sqrt{a})e^{-2\sqrt{ag/mt}}}{\sqrt{mg}+v_0\sqrt{a}+(\sqrt{mg}-v_0\sqrt{a})e^{-2\sqrt{ag/mt}}}$; raja-arvo $= \sqrt{\frac{mg}{a}}$.

71.

Kappaleen jäähtyminen tapahtukoon Newtonin jäähtymislain mukaisesti:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

missä t on aika, T kappaleen lämpötila, T_0 ympäristön muuttumaton lämpötila ja k kappaleelle ominainen vakio. Olkoon $k = 0.02\mathrm{s}^{-1}$ ja $T_0 = 10^\circ$. Olkoon kappaleen lämpötila tarkastelun alkuhetkellä $T(0) = 60^\circ$. Laske kappaleen lämpötila yhden minuutin, kymmenen minuutin ja tunnin kuluttua.

VASTAUS: $10 + 50e^{-1.2} \approx 25.1°\mathrm{C}$, $\quad 10 + 50e^{-12} \approx 10.0°\mathrm{C}$, $\quad 10 + 50e^{-72} \approx 10.0°\mathrm{C}$.

72.

Laskuvarjohyppääjän nopeutta hidastaa nopeuden neliöön verrannollinen voima, jolloin Newtonin lain mukainen liikeyhtälö on

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2,$$

missä v on putoamisnopeus ja t on aika. Ratkaise differentiaaliyhtälö ja osoita, että on olemassa rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Määritä rajanopeus, kun hyppääjä painaa $m = 80$ kg, hänen nopeutensa varjon auetessa on $v_0 = 10$ m/s, maan vetovoiman kiihtyvyydelle käytetään arvoa $g = 9.8\ \mathrm{m/s}^2$ ja hidastuvuuskerroin on $b = 30$ kg/m. Miten rajanopeus riippuu hyppääjän alkunopeudesta v_0?

VASTAUS: $v = \sqrt{mg/b}(1 - Ce^{-2\sqrt{bg/mt}})/(1 + Ce^{-2\sqrt{bg/mt}})$, rajanopeus $\sqrt{mg/b} \approx 5.1\mathrm{m/s}$.

73.

Tutki, millaisia ratkaisuja on differentiaaliyhtälöllä $y'(y(x)) = y(x)$.

VASTAUS: $y = 0$, $y = x^2/2 + C$.

74.

Ratkaise integraaliyhtälö

$$\int_1^x \frac{t^2 + y(t)^2 + ty(t)}{t^2}\, dt = y(x)$$

muodostamalla ensin puolittain derivoimalla differentiaaliyhtälö.

VASTAUS: $y = x \tan \ln x$, $x \in \,]e^{-\pi/2}, e^{\pi/2}[$.

75.

Differentiaaliyhtälön $F(x,y,y') = 0$ erikoisratkaisut löydetään usein tutkimalla niiden pisteiden (x,y) joukkoa, jotka (jollakin arvolla p) toteuttavat yhtälöt

$$F(x,y,p) = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = 0.$$

Määritä tämä joukko seuraavien yhtälöiden tapauksessa ja tutki, miten se suhtautuu yleisten ratkaisujen parveen:

$$\text{a) } y'^2 + yy' + x = 0, \quad \text{b) } y - x + 3y' - y'^3 = 0, \quad \text{c) } y'^2 - yy' + e^x = 0.$$

VASTAUS: a) Ei ole; b) $y = x - 2$, verhokäyrä; c) $y^2 = 4e^x$, verhokäyrä.

2.2. Käyräparven leikkaajat

76.

Määritä seuraavien käyräparvien kohtisuorat leikkaajat:

$$\text{a) } y = (x + C)^3, \quad \text{b) } x^3 - 3xy^2 = C, \quad \text{c) } y = Cx\exp(x^2 + y^2), \quad \text{d) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C,$$
$$\text{e) } \frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{f) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{C^2} = 1, \quad \text{g) } y = Cx^b.$$

Näissä C on parven parametri, muut kirjainsymbolit vakioita. Piirrä kuviot.

VASTAUS: a) $y = (-\frac{5}{9}x + C)^{3/5}$; b) $y^3 - 3yx^2 = C$; c) $2y^2 - 1 = C(2x^2 + 1)$; d) $b^2 \ln|y| = a^2 \ln(Cx)$; e) $x^2 + y^2 = 2b^2 \ln(Cy)$ $(|y| < b)$; f) $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln(Cx)$ $(|x| > a)$; g) $x^2 + by^2 = C$.

77.

Käyrä $y = e^{-x}$ liukuu a) x-akselin, b) y-akselin suunnassa kaikkiin mahdollisiin asemiin. Määritä muodostuneiden käyräparvien kohtisuorat leikkaajat.

VASTAUS: a) $y=\sqrt{2(x-C)}$; b) $y=e^x+C$.

78.

Määritä sellainen käyrä, joka leikkaa kohtisuorasti sekä parvea $y=\sqrt{x-C}$ että parvea $y=e^{2x}+C$.

VASTAUS: $y=\frac{1}{4}e^{-2x}$.

79.

Käyräparvi muodostuu paraabeleista, joiden akselina on y-akseli, polttopisteenä origo ja jotka aukeavat ylöspäin. Muodosta parven yhtälö jokin sopiva muuttuja parametrina ja johda parven differentiaaliyhtälö. Etsi kohtisuorien leikkaajien parvi.

VASTAUS: Alasaukeavat paraabelit, joilla on akselina y-akseli ja polttopisteenä origo.

80.

Käyräparven differentiaaliyhtälö olkoon

$$P(x,y)y'^2+Q(x,y)y'+R(x,y)=0.$$

Oletetaan, että alueen G pisteissä derivaatan y' suhteen ratkaistuna yhtälö antaa kaksi eri suurta reaalijuurta. Millä kerroinfunktioita koskevalla ehdolla vastaavat viivaelementit ovat keskenään kohtisuoria? Mikä geometrinen ominaisuus käyräparvella tällöin on?

VASTAUS: $P(x,y)+R(x,y)=0$.

81.

Määritä napakoordinaateissa annettujen käyräparvien

$$\text{a) } r=C\cos\varphi, \quad \text{b) } r=C\varphi, \quad \text{c) } r=Ce^{k\varphi}$$

kohtisuorat leikkaajat. Piirrä kuvio.

VASTAUS: a) $r=C\sin\varphi$; b) $r=Ce^{-\varphi^2/2}$; c) $r=Ce^{-\varphi/k}$.

82.

Määritä parametrimuodossa annetun käyräparven

$$\begin{cases} x=t+\cos t+C, \\ y=1+\sin t \end{cases}$$

kohtisuorat leikkaajat. (t on käyräparametri, C parviparametri.)

VASTAUS: $x=t+\sin t+C$, $y=1+\cos t$.

83.

Etsi käyräparvi, joka leikkaa paraabeliparven $y^2=4Cx$ kulmassa $\frac{\pi}{4}$.

VASTAUS: $\frac{1}{2}\ln(2x^2-xy+y^2)-\frac{3}{\sqrt{7}}\overline{\text{arc}}\tan\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}=C$.

84.

Käyräparven differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa olkoon $F(r,\varphi,\frac{dr}{d\varphi})=0$. Mikä on sen parven differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa, joka leikkaa em. parven kulmassa α?

VASTAUS: $F(\varphi,r,\frac{rr'+mr^2}{r-mr'})=0$, missä $r'=\frac{dr}{d\varphi}$ ja $m=\tan\alpha$.

2.3. Toisen ja korkeamman kertaluvun yhtälöt

85.

Ratkaise alkuarvoprobleema $y'' = x^2 e^x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

VASTAUS: $y = e^x(x^2 - 4x + 6) - ex + 1 - 2e$.

86.

Ratkaise reuna-arvoprobleema $y'' = x \sin x$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

VASTAUS: $y = -x \sin x - 2 \cos x - 4x/\pi + 2$.

87.

Palauta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y'' + y'^3 e^y = 0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi ja ratkaise se.

VASTAUS:

88.

Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

a) $y''^2 = y'$, b) $y'' = 1 - y'^2$, c) $xy'' + (x-1)y' = 0$, d) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$,
e) $y^3 y'' = 1$, f) $\sqrt{y}y'' = 1$, g) $y'' = e^y$, h) $yy'' = 1 + y'^2$,
i) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, j) $(1+y^2)y'' = y' + y'^3$.

VASTAUS: a) $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$; b) $y = \ln|C_1 e^x - 1/(C_1 e^x)| + C_2$, $y = \pm x + C$;
c) $y = C_1 e^{-x}(x+1) + C_2$; d) $y = (C_1 x - C_1^2)e^{x/C_1+1} + C_2$;
e) $y^2 = C_1^2 + (x + C_2)^2/C_1^2$; f) $x + C_2 = \pm\frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$;
g) $y = \ln(2C_1^2) + C_1 x + C_2 - 2\ln|e^{C_1 x + C_2} - 1|$, $y = \ln(2C_1^2) - 2\ln|\cos(C_1 x + C_2)|$,
$y = 2\ln(\sqrt{2}/|x + C|)$;
h) $y = (1/C_1)\cosh(C_1 x + C_2)$; i) $y = C_1/\cos^2(x + C_2)$; j) $C_1 y + (1 + C_1^2)\ln|y - C_1| = x + C_2$.

89.

Muodosta seuraavia differentiaaliyhtälöitä vastaavat normaaliryhmät ja ratkaise ne:

a) $y''' = y''^3$, b) $y''' + y''^2 = 0$, c) $y'y''' = 2y''^2$, d) $x^2 y^{(4)} = 2y''$, e) $xy^{(5)} = y^{(4)}$.

VASTAUS: a) $y = \pm\frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2 x + C_3$; b) $y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3$;
c) $y = (1/C_1)\ln|C_1 x + C_2| + C_3$, $y = C_2 x + C_3$;
d) $y = C_1 x^4 + (C_2 + C_3 \ln|x|)x + C_4$; e) $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

90.

Palauta differentiaaliyhtälö $yy'' + 2y'^2 = 0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi. Onko ryhmä autonominen? Etsi yhtälön yleinen ratkaisu. Määritä ratkaisukäyrä, joka sivuaa suoraa $y = k(x-1) + 1$ pisteessä $(1, 1)$. Piirrä ratkaisukäyrän kuvaajia muuttujan k eri arvoilla.

VASTAUS: $y = \sqrt[3]{C_1 x + C_2}$, $y = \sqrt[3]{3k(x-1) + 1}$.

91.

Ratkaise reuna-arvoprobleema

$$(1-y)y''+2y'^2=0;\quad y(0)=0,\ y(-1)=-1.$$

Onko differentiaaliyhtälöä vastaava normaaliryhmä autonominen?

VASTAUS: $y=x/(x+2)$.

92.

Määritä ne yhtälön $2y''=3y^2$ integraalikäyrät, joilla on asymptoottina x-akseli.

VASTAUS: $y=4/(x+C)^2$.

93.

Määritä ne käyrät, joilla kiinteästä muuttujan arvosta laskettu kaarenpituus on suoraan verrannollinen tangentin suuntakulman tangenttiin.

VASTAUS: $y=k\cosh(x/k+C_1)+C_2$, missä k on verrannollisuuskerroin.

94.

Määritä käyrät, joiden kaarevuussäde on

$$R=\frac{y}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

missä α on käyrän tangentin suuntakulma.

VASTAUS: $y=(1/C_1)\sqrt{1+C_2e^{C_1x}}$, $C_1C_2>0$.

95.

Osoita, että yhtälö $y''=f(y)$ voidaan aina ratkaista kahdella integroinnilla.

VASTAUS:

96.

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y''=f(y')$. a) Osoita, että jos $f(a)=0$, niin suorat $y=ax+C$ ovat ratkaisukäyriä. b) Johda integraalikäyrille parametriesitys

$$x=\int\frac{dz}{f(z)}+C_1,\quad y=\int\frac{z\,dz}{f(z)}+C_2.$$

Miten ratkaisukäyrät tällöin suhtautuvat toisiinsa?

VASTAUS:

97.

Tutki seuraavien differentiaaliyhtälötyyppien ratkaisumahdollisuutta integrointien avulla:

$$\text{a) } y^{(n)}=f(y^{(n-1)}),\qquad \text{b) } y^{(n)}=f(y^{(n-2)}).$$

VASTAUS:

98.

Olkoon differentiaaliyhtälössä $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ funktiolla F ominaisuus

$$F(x,ty,ty',\ldots,ty^{(n)}) = t^k F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

missä k on jokin vakio. Mitä tällöin voitetaan sijoituksella $u = y'/y$? Ratkaise sovellutuksena yhtälö $yy''' = y'y''$.

VASTAUS: Palaudutaan yhtä alempaan kertalukuun.
$y = C_2 \sinh(C_1 x) + C_3 \cosh(C_1 x)$, $y = C_2 \sin(C_1 x) + C_3 \cos(C_1 x)$, $y = C_2 + C_3 x$.