3. Lineaariset differentiaaliyhtälöt

3.1. Lineaariyhtälöiden teoriaa

99.

Onko differentiaaliyhtälö $y'' + x(y' - y'') = y + 1$ a) lineaarinen, b) homogeeninen?

VASTAUS:

100.

Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvasti derivoituvia välillä I ja olkoon tällä välillä $f(x) \neq 0$. Etsi ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on $y = Cf(x) + g(x)$.

VASTAUS: $f(x)y' - f'(x)y = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$.

101.

Olkoon $y_1(x) = x^2$ ja $y_2(x) = x|x|$. Osoita, että funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia ja että niiden Wronskin determinantti on $= 0$. Onko mahdollista muodostaa toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuja em. funktiot ovat?

VASTAUS: Ei.

102.

Osoita, että eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat differentiaaliyhtälön

$$(x^2 + x)y''' + (2 - x^2)y'' - (2 + x)y' = 0$$

ratkaisuja. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

VASTAUS: $y = C_1e^x + C_2 \ln x + C_3$.

103.

Osoita, että differentiaaliyhtälöllä

$$x(3 + x)y''' + (12 - x^2)y'' - 3(4 + x)y' = 0$$

on ratkaisuina $y = e^x$ ja $y = 1/x^2$. Mikä on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu?

VASTAUS: $y = C_1e^x + C_2/x^2 + C_3$.

104.

Osoita, että eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat differentiaaliyhtälöä

$$(x^2 + x)y''' + (2 - x^2)y'' - (2 + x)y' = 2(1 - x - x^2)$$

vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisuja. Totea, että epähomogeenisella yhtälöllä on ratkaisuna eräs toisen asteen polynomi. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

VASTAUS:

105.

Määritä laskentaohjelmalla *Besselin differentiaaliyhtälön* $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ yleinen ratkaisu. Tässä n on parametri, joka voi saada minkä tahansa reaaliarvon. Kokeile ensin symbolilla n, ja anna sille tämän jälkeen kokonaislukuarvoja ja yksinkertaisia murtolukuarvoja. Ratkaisut ovat muotoa $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. Miten funktiot y_1 ja y_2 suhtautuvat toisiinsa parametrin n eri arvoilla? Millaisia ominaisuuksia niillä on? Rajoitu tarkastelemaan arvoja $x>0$.

106.

Tutki, millaisia kohdassa $x=0$ annettuja alkuehtoja arvoa $n=1$ vastaavaan *Besselin differentiaaliyhtälöön* $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$ voidaan liittää. Mikä on tilanne, jos ehdot annetaan kohdassa $x=1$?

107.

Muodosta toisen kertaluvun homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö, jolla on yksityisratkaisuina kahdesti derivoituvat funktiot $y_1(x)$ ja $y_2(x)$, joiden Wronskin determinantti on $\neq 0$.

VASTAUS: $(y_1y_2'-y_1'y_2)y''-(y_1y_2''-y_1''y_2)y'+(y_1'y_2''-y_1''y_2')y=0$.

108.

Lineaarisella homogeenisella toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä on yksityisratkaisuina $y_1(x)=x$ ja $y_2(x)=\cos x$. Muodosta yhtälö ja määritä sen ratkaisuista se, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y=x+1$ origossa.

VASTAUS: $(x\sin x+\cos x)y''-(x\cos x)y'+(\cos x)y=0; \quad y=x+\cos x$.

109.

Olkoon funktio $P(x)$ derivoituva. Tee differentiaaliyhtälöön $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ sijoitus

$$y(x)=u(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

ja saata se muotoon $u''+I(x)u=0$. Millainen funktio on $I(x)$?

VASTAUS: $I(x)=Q(x)-\frac{1}{4}P(x)^2-\frac{1}{2}P'(x)$.

110.

Olkoon funktio $P(x)$ jatkuva. Kerro differentiaaliyhtälö $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ funktiolla

$$p(x)=e^{\int P(x)\,dx}$$

ja saata tulos muotoon

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0.$$

Millainen funktio on $q(x)$?

VASTAUS: $q(x)=Q(x)p(x)$.

111.

Olkoon $y_1(x)$ yhtälön

$$\frac{d}{dx}\left(p_1(x)\frac{dy}{dx}\right)+q_1(x)y=0$$

ei-triviaali ($\not\equiv 0$) ratkaisu ja $y_2(x)$ yhtälön

$$\frac{d}{dx}\left(p_2(x)\frac{dy}{dx}\right)+q_2(x)y=0$$

nollasta eroava ($\neq 0\ \forall x$) ratkaisu. Todista *Piconen identtisyys*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1}{y_2}(p_1 y_1' y_2 - p_2 y_1 y_2')\right] = (q_2 - q_1)y_1^2 + (p_1 - p_2){y_1'}^2 + p_2\left(y_1' - y_1\frac{y_2'}{y_2}\right)^2.$$

VASTAUS:

112.

Nesteeseen upotettu massa m on ripustettu pystysuoraan kierrejouseen, jonka jousivakio on k. Massa saatetaan pystysuoraan värähdysliikkeeseen antamalla sille alkupoikkeama ja alkunopeus; lisäksi siihen vaikuttaa ajan mukana muuttuva pystysuora ulkoinen voima $F(t)$. Neste vastustaa liikettä nopeuteen verrannollisella voimalla (verrannollisuuskerroin $= c$). Johda systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälö.

VASTAUS:

113.

Tutki edellisen tehtävän differentiaaliyhtälöä numeerisesti. Aseta ulkoinen voima jaksolliseksi: $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Valitse yhtälössä oleviksi vakioiksi esimerkiksi $m = 1$, $k = 5$, $c = 2$, $F_0 = 1$, $\omega = 1$. Tutki systeemin käyttäytymistä ajan funktiona. Mitä mahdetaan tarkoittaa ratkaisun transientilla komponentilla ja tasapainotilaratkaisulla (steady state solution)?

VASTAUS:

114.

Muuta edellisen tehtävän systeemin parametreja siten, että se kuvaa tilannetta, missä neste ei vastusta liikettä. Etsi joko kokeellisesti tai laskemalla sellainen voiman $F(t)$ taajuus ω, että systeemi on resonanssissa; tällöin heilahtelun amplitudi kasvaa rajatta. Miten systeemi käyttäytyy em. resonanssikohdan lähellä?

VASTAUS:

115.

Tutki, voidaanko edellisen tehtävän mukaiseen rajatta kasvavaan amplitudiin (ja siis systeemin rikki räjähtämiseen) joutua, jos neste vastustaa liikettä.

VASTAUS:

3.2. Homogeenisen yhtälön ratkaiseminen

116.

Yhtälöllä

$$y' + P(x)y = (x+1)^2 e^x$$

on ratkaisuna $y = (x^2 - 1)e^x$. Määritä $P(x)$ ja yhtälön yleinen ratkaisu. Etsi alkuehdon $y(0) = 5$ toteuttava yksityisratkaisu.

VASTAUS: $P(x) = 2/(x^2 - 1)$, $y = C(x+1)/(x-1) + (x^2-1)e^x$, $C = -6$.

117.

Funktiot $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat yhtälön $y' + a(x)y = 0$ ratkaisuja, vastaavasti $y_1(x) + e^x$ ja $y_2(x) - 1$ yhtälön $y' + a(x)y + b(x) = 0$ ratkaisuja. Määritä se jälkimmäisen yhtälön ratkaisu, jonka kuvaaja kulkee origon kautta.

VASTAUS: $y = \frac{1}{2}(e^x - 1)$.

118.

Määritä seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut, kun eräs yksityisratkaisu tai sen muoto on annettu:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } xy'' - (x+3)y' + y = 0, \quad \text{polynomi,}\\
&\text{b) } x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad \text{polynomi,}\\
&\text{c) } (x^2 - 2x - 1)y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0, \quad \text{polynomi,}\\
&\text{d) } y'' + (\tan x - 2\cot x)y' + 2(\cot^2 x)y = 0, \quad \sin x,\\
&\text{e) } y'' + 2(1 - \tan^2 x)y = 0, \quad \cos^2 x,\\
&\text{f) } (x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0, \quad e^{kx}.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) $y = C_1(x+3) + C_2 e^x(x^2 - 4x + 6)$; b) $y = C_1 x + C_2 \ln x$;
c) $y = C_1(x^2+1) + C_2(x^2+x)$; d) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$;
e) $y = C_1 \cos^2 x + C_2(\tan x + \sin 2x)$; f) $y = e^x[C_1 + C_2(x^2 - 4x)]$.

119.

Mikä yksinkertainen alkeisfunktio on differentiaaliyhtälön $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ratkaisuna, jos $1 + P(x) + Q(x) \equiv 0$? Ratkaise tämän nojalla yhtälöt

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (x-1)y'' - xy' + y = 0,\\
&\text{b) } (2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + (2 - 2x)y = 0,\\
&\text{c) } y'' - 2\left(1 + x + \frac{1}{2x}\right)y' + \left(1 + 2x + \frac{1}{x}\right)y = 0.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) $y = C_1 e^x + C_2 x$; b) $y = c_1 e^x + C_2 x^2$; c) $y = e^x(C_1 + C_2 e^{x^2})$.

120.

Etsi jollakin symbolisella ohjelmalla *Airyn differentiaaliyhtälön* $y'' - xy = 0$ yleinen ratkaisu. Etsi yksityisratkaisut, kun alkuehtona on a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Piirrä ratkaisujen kuvaajat samaan kuvioon. Tarkastele erityisesti negatiivisia muuttujan arvoja. Miten ratkaisufunktioiden nollakohdat näyttävät suhtautuvan toisiinsa?

VASTAUS:

3.3. Täydellisen yhtälön ratkaiseminen

121.

Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad \text{b) } (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2, \quad \text{c) } y'\sin x - y = 1 - \cos x.$$

VASTAUS: a) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$; b) $y = (x+C)(1+x^2)$; c) $y = (x+C)\tan(x/2)$.

122.

Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat:

$$\begin{aligned}&\text{a) } xy' + 2y = x^3,\ y(1) = 1,\\&\text{b) } y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ y(0) = 1,\\&\text{c) } y' + |x - |x||\,y = x,\ y(0) = 0.\end{aligned}$$

VASTAUS: a) $y = \frac{1}{5}(4/x^2 + x^3)$; b) $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$;
c) $y = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)$, kun $x \leq 0$, $y = \frac{1}{2}x^2$, kun $x \geq 0$.

123.

Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y' + y\cot x = e^{\cos x}, \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Piirrä ratkaisukäyrä.

VASTAUS:

124.

Määritä se kaikilla muuttujan x arvoilla jatkuva funktio $y(x)$, joka toteuttaa integraaliyhtälön

$$2\int_0^x ty(t)\,dt = x^2 + y(x).$$

VASTAUS: $y = 1 - e^{x^2}$.

125.

Funktio $q(x)$ olkoon kaikilla arvoilla x jatkuva ja toteuttakoon epäyhtälön $q(x) < x^2$. Olkoon $y(x)$ yhtälön $y' + 3x^2y = q(x)$ ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 0$. Mitä arvoja $y(-1)$ voi saada?

VASTAUS: $y(-1) > (1 - e)/3$.

126.

Etsi ne käyrät, joilla x-akselin, käyrän pisteeseen osoittavan paikkavektorin ja tähän pisteeseen asetetun tangentin muodostaman kolmion ala on $= a$ (vakio).

VASTAUS: $x = Cy \pm \frac{a}{y}$.

127.

Differentiaaliyhtälöllä $y'' + y = 0$ on yksityisratkaisuina $\sin x$ ja $\cos x$. Etsi yleisellä vakioiden varioinnilla differentiaaliyhtälöiden

$$\text{a) } y'' + y = \tan x, \qquad \text{b) } y'' + y = 2x\sin x$$

yleiset ratkaisut.

VASTAUS: a) $y = C_1\sin x + C_2\cos x - (\cos x)\ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$;
b) $y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}(x\sin x - x^2\cos x)$.

128.

Ratkaise alkuarvoprobleema $y'' + x(y' - y'') = y + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

VASTAUS: $y = e^x - x - 1$.

129.

Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + y' \tan x = x \tan x$ yleinen ratkaisu.

VASTAUS: $y = C_1 \sin x + C_2 + \frac{1}{2}x^2 - \ln|\cos x| - (\sin x)\ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$.

130.

Etsi differentiaaliyhtälön $(x-1)y'' - xy' + y = x - 1$ yleinen ratkaisu.

VASTAUS: $y = C_1 e^x + C_2 x + e^x \int e^{-x}/(x-1)\,dx - x\ln|x-1| - 1$.

131.

Totea, että differentiaaliyhtälöä $(x+1)y'' - xy' - y = (x+1)^2$ vastaavan homogeeniyhtälön lineaarisesti riippumattomiksi ratkaisuiksi kelpaavat

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt.$$

Etsi em. epähomogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu ja alkuehdon $y(0) = y'(0) = 0$ toteuttava yksityisratkaisu.

VASTAUS: $y = C_1 e^x + C_2 e^x \int_0^x e^{-t}/(t+1)\,dt - \frac{1}{3}(x^2 + 4x + 5)$;
$y = \frac{1}{3}(5e^x - e^x \int_0^x e^{-t}/(t+1)\,dt - x^2 - 4x - 5$, missä $x > -1$.

132.

Olkoon $h(x)$ lineaarista vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä $y'' + py' + qy = R(x)$ vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Osoita, että

$$y(x) = \int_0^x h(x-t)R(t)\,dt$$

on epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisu, jolle $y(0) = y'(0) = 0$. Ratkaise tällä menettelyllä alkuarvoprobleema $y'' + y = \tan x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

VASTAUS:

133.

Bernoulli'n differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = A(x)y + B(x)y^k$. Se voidaan palauttaa lineaariseksi ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi sijoituksella $z = y^{1-k}$. Ratkaise tällä tavoin seuraavat Bernoulli'n yhtälöt:

$$\text{a) } xy' + y = x^3y^2, \qquad \text{b) } y' + y = y^2(\cos x - \sin x),$$
$$\text{c) } 3y' + y = (1-2x)y^4, \quad \text{d) } y' + \frac{2y}{1-x} = 4(x^2 - x)\sqrt{y}.$$

VASTAUS: a) $y = 1/(Cx - \frac{1}{2}x^3)$; b) $y = 1/(Ce^x - \sin x)$;
c) $y = 1/\sqrt[3]{Ce^x - 2x - 1}$; d) $y = (x^2 + C)^2(x-1)^2$.

134.

Riccati'n differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$. Jos sen yksityisratkaisu $y_0(x)$ tunnetaan, se voidaan palauttaa Bernoulli'n yhtälöksi sijoituksella $y = y_0 + z$. Ratkaise tällä tavoin seuraavat Riccati'n yhtälöt, joiden yksityisratkaisun muoto tunnetaan:

$$\text{a) } y' = 1 + x + x^2 - (2x+1)y + y^2, \quad y_0(x) = ax + b,$$
$$\text{b) } y' = y^2 - x^2y - (x-1)^2, \quad y_0(x) = ax^2 + bx + c,$$
$$\text{c) } x^2y' + (xy-2)^2 = 0, \quad y_0(x) = \frac{a}{x}.$$

VASTAUS: a) $y = (Cxe^x - x - 1)/(Ce^x - 1)$;
b) $y = x^2 + 1 - e^{\frac{1}{3}x^3+2x} / \left(C + \int_0^x e^{\frac{1}{3}t^3+2t}\, dt\right)$;
c) $y = (C + 4x^3)/(Cx + x^4)$.

3.4. Vakiokertoimiset yhtälöt

135.

Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut:

$$\text{a) } y' - y = \cosh x, \quad \text{b) } y' - y = e^x - \sin x.$$

VASTAUS: a) $y = Ce^x - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$; b) $y = Ce^x + xe^x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

136.

Ratkaise alkuarvoprobleemat

$$\text{a) } y' + 2y = x^3 - x,\ y(1) = 1, \quad \text{b) } y' + 3y = x^3 + 1,\ y(1) = 2,$$
$$\text{c) } y' + y = \sinh x,\ y(0) = 0.$$

VASTAUS: a) $y = \frac{9e^2}{8}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$;
b) $y = \frac{41e^3}{27}e^{-3x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$;
c) $y = \frac{1}{2}(\sinh x - xe^{-x})$.

137.

Osoita, että sillä yhtälön $y' = x + |y|$ ratkaisulla, joka toteuttaa alkuehdon $y(-2) = 1$, on minimi $y(\ln 2 - 1) = \ln 2 - 1$.

VASTAUS:

138.

Määritä yhtälön $y' = |y - x|$ yleinen ratkaisu. Piirrä suuntakenttä ja ratkaisukäyriä. Määritä $y(1)$, kun y toteuttaa alkuehdon a) $y(-1) = -\frac{1}{2}$, b) $y(-1) = \frac{1}{2}$.

VASTAUS: Alueessa $y \geq x + 1$ ratkaisu on $y = Ce^x + x + 1$, missä $C \geq 0$;
alueessa $x - 1 < y < x + 1$ on $y = -e^x/C + x + 1$, jos $x \leq \ln C$, ja $y = Ce^{-x} + x - 1$, jos $x \geq \ln C$; tässä on $C > 0$;
alueessa $y \leq x - 1$ on $y = Ce^{-x} + x - 1$, missä $C \leq 0$;
a) $y(1) = 2/e^2$; b) $y(1) = e^2/2 + 2$.

139.

Olkoon $a \neq 0$. Yhtälön $y' + ay = A \sin \omega x$ ratkaisuista vain yksi on jaksollinen. Määritä tämän amplitudi.

VASTAUS: $|A|/\sqrt{a^2+\omega^2}$.

140.

Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut:

a) $y''+4y'+5y=3x-2$,	b) $y''-y'-2y=4x$,	c) $y''-7y'+6y=\sin x$,
d) $y''+4y=\sin 3x$,	e) $y''+2y'+5y=e^{-x}$,	f) $y''-2y'+y=e^x+\cos x$,
g) $y''+4y'+4y=e^{-2x}+\sin x$,	h) $y''-4y=xe^{2x}$,	i) $y''-6y'+9y=e^{3x}/x^2$.

VASTAUS: a) $y=e^{-2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+\frac{3}{5}x-\frac{22}{25}$; b) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-2x+1$;
c) $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5}{74}\sin x+\frac{7}{74}\cos x$; d) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x-\frac{1}{5}\sin 3x$;
e) $y=e^{-x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\frac{1}{4})$; f) $y=e^x(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)-\frac{1}{2}\sin x$;
g) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)+\frac{3}{25}\sin x-\frac{4}{25}\cos x$;
h) $y=e^{2x}(C_1-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}x^2)+C_2e^{-2x}$; i) $y=e^{3x}(C_1+C_2x-\ln|x|)$.

141.

Ratkaise alkuarvotehtävä:

$$y''-2y'+y=\sin x, \quad y(0)=y'(0)=1.$$

VASTAUS: $y=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}xe^x$.

142.

Ratkaise seuraavat alku- tai reuna-arvoprobleemat:

$$\text{a) } y''-4y'+5y=\sin x, \quad y(0)=0,\ y'(0)=-1,$$
$$\text{b) } y''-3y'+x^2-1=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0,$$
$$\text{c) } y''-5y'+6y=e^x, \quad y(0)=y(1)=0.$$

VASTAUS: a) $y=\frac{1}{8}[-e^{2x}(7\sin x+\cos x)+\sin x+\cos x]$;
b) $y=\frac{1}{81}(7e^{3x}+9x^3+9x^2-21x+74)$;
c) $y=\frac{1}{2}(\frac{1}{e}e^{3x}-\frac{e+1}{e}e^{2x}+e^x)$.

143.

Ratkaise alkuarvoprobleema $y''+5y'+6y=x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

VASTAUS:

144.

Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y''+y=2\sin x, \qquad y(\tfrac{\pi}{2})=1, \quad y'(\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{\pi}{2}.$$

VASTAUS:

145.

Ratkaise kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y'' + ay' = e^{bx}, & \text{b) } y'' - a^2 y = e^{bx}, & \text{c) } y'' + a^2 y = e^{bx}, \\ \text{d) } y'' + a^2 y = \sin bx, & \text{e) } y'' + a^2 y = x \sin bx, & \text{f) } y'' + 2y' + (1+a^2)y = e^{bx}. \end{array}$$

VASTAUS: a) Jos $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$, niin $y = C_1 e^{-ax} + C_2 + \frac{1}{b(a+b)} e^{bx}$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 e^{-ax} + C_2 - \frac{x}{a} e^{-ax}$;
jos $a \neq 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 e^{-ax} + C_2 + \frac{x}{a}$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$;
b) jos $a \neq 0$, $b^2 \neq a^2$, niin $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{1}{b^2 - a^2} e^{bx}$;
jos $a \neq 0$, $b = a$, niin $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{x}{2a} e^{ax}$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - \frac{x}{2a} e^{-ax}$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$;
c) jos $a \neq 0$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{b^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$;
d) jos $a \neq 0$, $b^2 \neq a^2$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{1}{a^2 - b^2} \sin bx$;
jos $a \neq 0$, $b = a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax - \frac{x}{2a} \cos ax$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{x}{2a} \cos ax$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 - \frac{1}{b^2} \sin bx$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2$;
e) jos $a \neq 0$, $b^2 \neq a^2$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{x}{a^2 - b^2} \sin bx - \frac{2b}{(a^2 - b^2)^2} \cos bx$;
jos $a \neq 0$, $b = a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax - \frac{x^2}{4a} \cos ax + \frac{x}{4a^2} \sin ax$;
jos $a \neq 0$, $b = -a$, niin $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{x^2}{4a} \cos ax - \frac{x}{4a^2} \sin ax$;
jos $a = 0$, $b \neq 0$, niin $y = C_1 x + C_2 - \frac{x}{b^2} \sin bx - \frac{2}{b^3} \cos bx$;
jos $a = 0$, $b = 0$, niin $y = C_1 x + C_2$;
f) jos $a \neq 0$, niin $y = e^{-x}(C_1 \sin ax + C_2 \cos ax) + \frac{1}{a^2 + (b+1)^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b \neq -1$, niin $y = e^{-x}(C_1 x + C_2) + \frac{1}{(b+1)^2} e^{bx}$;
jos $a = 0$, $b = -1$, niin $y = e^{-x}(C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2)$.

146.

Sovella yleistä vakioiden variointia yhtälön $y'' + ay' + by = R(x)$ yksityisratkaisun etsimiseen, kun $a^2 - 4b$ on a) > 0, b) $= 0$, c) < 0.

VASTAUS:

147.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + \omega^2 y = A \sin \omega x + B \cos \omega x$.

VASTAUS: $y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x + \frac{B}{2\omega} x \sin \omega x - \frac{A}{2\omega} x \cos \omega x$.

148.

Pidetään tunnettuna, että homogeeniyhtälön $y'' + \omega^2 y = 0$ ratkaisut ovat $y_1(x) = \sin \omega x$, $y_2(x) = \cos \omega x$. Sovella vakioiden variointia yhtälön $y'' + \omega^2 y = A \sin \omega x + B \cos \omega x$ yksityisratkaisun etsimiseen.

VASTAUS:

149.

Laske yhtälön $y'' + ay' + by = 0$ perusratkaisujen Wronskin determinantti vakioiden a, b kaikilla arvoilla.

VASTAUS: $W = Ce^{-ax}$.

150.

Määritä ne reaaliset parametrin a arvot, joilla yhtälöillä

$$y'' + 2ay' - 4y = 0 \quad \text{ja} \quad y'' - 2y' + ay = 0$$

on yhteinen ei-triviaali ($\not\equiv 0$) ratkaisu. Ratkaise yhtälöt näillä parametrin arvoilla.

VASTAUS: Kolme ratkaisua: $a = 0$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, $y = C_1e^{2x} + C_2$;
$a = \frac{1}{8}(3\sqrt{17} - 5)$, $y = C_1e^{\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1)x} + C_2e^{-(\sqrt{17}-1)x}$, $y = C_1e^{\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1)x} + C_2e^{\frac{1}{4}(7-\sqrt{17})x}$;
$a = -\frac{1}{8}(3\sqrt{17} + 5)$, $y = C_1e^{-\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)x} + C_2e^{(\sqrt{17}+1)x}$, $y = C_1e^{-\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)x} + C_2e^{\frac{1}{4}(7+\sqrt{17})x}$.

151.

Ratkaise yhtälö

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}.$$

VASTAUS: $y = \frac{1}{30}e^{4x} + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

152.

Ratkaise differentiaaliyhtälö:

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = e^x.$$

VASTAUS: $y = \frac{1}{4}xe^x + C_1e^x + C_2e^x \sin 2x + C_3e^x \cos 2x$.

153.

Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y^{(5)} + 2y''' + y' = 0, & \text{b) } y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0, \\ \text{c) } y''' + 3y'' - 2y = \sin x, & \text{d) } y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 2e^{-2x} - 2x. \end{array}$$

VASTAUS: a) $y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \sin x + C_5 x \cos x$;
b) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x + C_7x^2)$;
c) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{(\sqrt{3}-1)x} + C_3e^{-(\sqrt{3}+1)x} - \frac{5}{26}\sin x + \frac{1}{26}\cos x$;
d) $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3x + C_4x^2) + e^{-2x} - x^2 + 6x$.

154.

Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'''' - 4y''' + 12y'' + 4y' - 13y = 9e^{2x} + 52x - 3.$$

VASTAUS: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{2x}(C_3 \sin 3x + C_4 \cos 3x) + \frac{1}{3}e^{2x} - 4x - 1$.

155.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'''' + 3y''' + 3y'' + y' = 2e^{-2x} - 2x$.

VASTAUS: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + C_4 + e^{-2x} - x^2 + 6x$.

156.

Ratkaise alkuarvoprobleemat

$$
\begin{aligned}
&\text{a) } y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1,\\
&\text{b) } y''' - ky' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2,\\
&\text{c) } y''' - y'' - y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.
\end{aligned}
$$

VASTAUS: a) $y = e^x$;
b) jos $k > 0$, niin $y = \frac{2}{k}\cosh(\sqrt{k}x) + \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}x) - \frac{2}{k}$;
jos $k = 0$, niin $y = x^2 + x$;
jos $k < 0$, niin $y = \frac{2}{k}\cosh(\sqrt{-k}x) + \frac{1}{\sqrt{-k}}\sinh(\sqrt{-k}x) - \frac{2}{k}$;
c) $y = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{4}e^x(1+2x) - \frac{1}{12}e^{-x}$.

157.

Ratkaise alkuarvoprobleema $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -5$, $y''(0) = 1$.

VASTAUS:

158.

Etsi kaikki differentiaaliyhtälön $y''' + y'' + 2y' + 2y = 0$ jaksolliset ratkaisut.

VASTAUS:

159.

Ratkaise kaikilla arvoilla $a \in \mathbb{R}$ differentiaaliyhtälöt

$$\text{a) } y^{(4)} + a^4 y = x^2, \quad \text{b) } y''' - (a+2)y'' + (2a+1)y' - ay = x + 1.$$

VASTAUS: a) Jos $a \neq 0$, niin
$y = e^{ax/\sqrt{2}}(C_1 \sin(ax/\sqrt{2}) + C_2 \cos(ax/\sqrt{2})) + e^{-ax/\sqrt{2}}(C_3 \sin(ax/\sqrt{2}) + C_4 \cos(ax/\sqrt{2}))$;
jos $a = 0$, niin $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{1}{360}x^6$;
b) jos $a \neq 0$, $a \neq 1$, niin $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{3a+1}{a^2}$;
jos $a = 0$, niin $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$;
jos $a = 1$, niin $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) - x - 4$.

160.

Muunna *Eulerin differentiaaliyhtälö*

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

sijoituksella $t = \ln|x|$ vakiokertoimiseksi lineaariyhtälöksi. Sovella tulosta yhtälöön

$$x^2 y'' - xy' + y = 0,$$

ratkaise saatu vakiokertoiminen yhtälö ja muodosta tämän avulla alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu.

VASTAUS:

161.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ kokeilemalla muotoa $y = x^r$ olevaa yritettä.

VASTAUS:

162.

Etsi differentiaaliyhtälön $x^2y'' + 5xy' + y = 0$ yleinen ratkaisu muotoa $y = x^r$ olevaa yritettä käyttäen. Etsi alkuehtoa $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$ vastaava yksityisratkaisu.

VASTAUS:

163.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 \sin x$ yritteellä $y = x^r$ sekä yleisellä vakioiden varioinnilla. Kirjoita yhtälöt, joista saadaan integroimisvakioiden arvot, kun alkuehtona on $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

VASTAUS:

164.

Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle $x^2y'' + xy' - y = 4$.

VASTAUS:

165.

Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut:

$$\text{a) } x^2y'' - xy' + y = 0, \quad \text{b) } x^2y'' - 9xy' + 21y = 0, \quad \text{c) } x^2y'' - 2xy' + 2y = x,$$
$$\text{d) } x^2y'' + xy' - y = x^2, \quad \text{e) } x^2y'' + xy' + y = x^3 - 2x, \quad \text{f) } x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}.$$

VASTAUS: a) $y = (C_1 + C_2 \ln|x|)x$; b) $y = C_1x^3 + C_2x^7$; c) $y = C_1x + C_2x^2 - x\ln|x|$;
d) $y = C_1x + C_2/x + \frac{1}{3}x^2$; e) $y = C_1 \sin\ln|x| + C_2 \cos\ln|x| + \frac{1}{10}x^3 - x$; f) $y = C_1x^2 + C_2x^3 + 1/(12x)$.

166.

Ratkaise kaikilla $p, q \in \mathbb{R}$ differentiaaliyhtälö

$$x^2y'' + (2p+1)xy' + qy = 0.$$

VASTAUS: Jos $q < p^2$, niin $y = C_1x^{-p+\sqrt{p^2-q}} + C_2x^{-p-\sqrt{p^2-q}}$;
jos $q = p^2$, niin $y = x^{-p}(C_1 + C_2 \ln x)$;
jos $q > p^2$, niin $y = x^{-p}(C_1 \sin(\sqrt{q-p^2}\ln x) + C_2 \cos(\sqrt{q-p^2}\ln x))$.

167.

Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{a) } (x+1)^2y'' + (x+1)y' + y = x^2, \quad \text{b) } (3x+2)^2y'' + 7(3x+2)y' + 63x - 18 = 0.$$

VASTAUS: a) $y = C_1 \sin\ln|x+1| + C_2 \cos\ln|x+1| + \frac{1}{5}(x+1)^2 - x$;
b) $y = C_1 + C_2(3x+2)^{-4/3} - 3x + 5\ln|3x+2|$.

168.

Ratkaise alkuarvoprobleema

$$x^3y''' + xy' - y = 0, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 3.$$

VASTAUS: $y = [1 + \ln x + (\ln x)^2]x$.

169.

Ratkaise kaikilla arvoilla $a \in \mathbb{R}$ differentiaaliyhtälö $x^3y''' + 2ax^2y'' - 4a(xy' - y) = 0$.

VASTAUS: Jos $a \neq -1$, $a \neq -\frac{1}{2}$, niin $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^{-2a}$;
jos $a = -1$, niin $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^2 \ln|x|$;
jos $a = -\frac{1}{2}$, niin $y = C_1x + C_2x\ln|x| + C_3x^2$.

170.

Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälö valitsemalla apumuuttujaksi y'/x:

$$x^2y''' + 2(x^2 - x)y'' + (x^2 - 2x + 2)y' = x^3.$$

VASTAUS: $y = e^{-x}[C_1x^2 + C_2(x+1)] + \frac{1}{2}x^2 + C_3$.

171.

Etsi integro-differentiaaliyhtälön

$$x^2y'(x) + 2\int_x^0 y(t)\,dt = 0$$

kaikki ratkaisut johtamalla ensin differentiaaliyhtälö funktiolle y.

VASTAUS: $y = Cx$.

172.

Sähköisen RL-piirin differentiaaliyhtälö on

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

missä tuntematin funktio $I(t)$ esittää virtaa, L ja R (induktanssi ja vastus) ovat piirille karakteristisia vakioita ja $E(t)$ on piiriin syötetty jännite. Ratkaise differentiaaliyhtälö tapauksissa a) $E(t) = E_0 =$ vakio, b) $E(t) = E_0 \sin\omega t$. Millainen fysikaalinen tulkinta ratkaisulle voidaan antaa?

VASTAUS: a) $I = E_0/R + Ce^{-Rt/L}$;
b) $I = \dfrac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t) + Ce^{-Rt/L}$.

173.

Olkoot R, L, E ja ω positiivisia vakioita, $I(t)$ tuntematon funktio. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E\sin\omega t$$

jaksollinen ratkaisu. Mikä on tätä ratkaisua vastaava alkuehto origossa? Mikä on jakson pituus?

VASTAUS:

174.

Pitkin x-akselia liikkuvan massapisteen yhtälö olkoon

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

missä muuttuja t on aika, massa m ja k positiivisia vakioita. Määritä $x(t)$ alkuehdolla $x(0) = R$, $x'(0) = 0$. Miten pitkän ajan kuluttua massapiste palaa lähtökohtaansa, jos $R = 6.36 \cdot 10^6$ m ja $x''(0) = -9.8$ m/s^2? Mikä on probleeman fysikaalinen sisältö?

VASTAUS: $x(t) = R\cos(\sqrt{k/m}t)$; ajan $2\pi\sqrt{R/g} \approx 84.4$ min kuluttua.

175.

Ratkaise yhtälö $x''(t) + \alpha x'(t) + g = 0$, missä α ja g ovat positiivisia vakioita. Sovella alkuehtoa $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ ja määritä se muuttujan t arvo, jolla $x'(t) = 0$. Mikä on probleeman fysikaalinen sisältö?

VASTAUS: $x(t) = \frac{\alpha v_0 + g}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{g}{\alpha}t, \quad t = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha v_0 + g}{g}$.