

5. Differenssiyhtälöt

5.1. Differenssiyhtälön käsite

198.

Ratkaise epälineaarinen differenssiyhtälö $a_{n+1}^2 - 3a_{n+1}a_n + 2a_n^2 = 0$.

VASTAUS:

199.

Olkoon $\langle b_n \rangle$ annettu lukujono. Ratkaise differenssiyhtälö $a_{n+1}a_n - b_n(a_{n+1} - a_n) + 1 = 0$.

VASTAUS: $a_n = \tan(C + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\text{arccot}} b_k)$.

5.2. Lineaariset differenssiyhtälöt

200.

Ratkaise seuraavat lineaariset differenssiyhtälöt (alkuarvoprobleemat) sijoituksella $a_n = z^n$:

$$\text{a) } 2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0, \quad a_0 = 3, a_1 = 0;$$

$$\text{b) } a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n), \quad a_0 = a_1 = 1;$$

$$\text{c) } a_{n+3} + a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 2, a_1 = -2, a_2 = 6.$$

Generoi myös rekursiivisesti yhtälöiden määrittelemiä lukujonoja ja vertaa tuloksia alkuarvoprobleeman ratkaisuun.

VASTAUS: a) $a_n = (-1)^n + 1/2^{n-1}$; b) $a_n = 2^{n/2} \cos(n\pi/4)$;

c) $a_n = 1 + (-1)^n(1 + 2n)$.