6. Differentiaaliyhtälöiden approksimatiivisesta ratkaisemisesta

6.1. Sarjaratkaisut

201.

Ratkaise origokeskisen potenssisarjan avulla differentiaaliyhtälö

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$$

VASTAUS: $y = a_0(1+x^2) + x + x^3$.

202.

Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' + y = 0$ yleinen ratkaisu origokeskisen potenssisarjan muodossa. Ratkaise differentiaaliyhtälö myös alkeisfunktioiden avulla. Muodosta ratkaisufunktion Maclaurinin sarja. Onko tämä sama kuin edellä saatu sarjaratkaisu?

VASTAUS:

203.

Etsi potenssisarjamuodossa ratkaisu alkuarvoprobleemalle $y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Määritä sarjan suppenemissäde. Lausu ratkaisu myös alkeisfunktioiden avulla.

VASTAUS:

204.

Etsi differentiaaliyhtälön $y'' = y$ yleinen ratkaisu origokeskisten potenssisarjojen avulla.

VASTAUS:

205.

Etsi origokeskinen sarjaratkaisu Airyn differentiaaliyhtälölle $y'' - xy = 0$.

VASTAUS: $y = C_1y_1 + C_2y_2$, missä $y_1 = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \ldots$, $y_2 = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \ldots$; suppenemissäde $R = \infty$.

206.

Etsi origokeskinen sarjaratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0.$$

Totea, että yhtälöllä on yksityisratkaisuna polynomi.

VASTAUS:

207.

Etsi alkuarvoprobleemalle $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$ potenssisarjaratkaisu. Tutki sarjan suppenemissädettä numeerisesti ja piirrä saadun sarjaratkaisun kuvaaja.

VASTAUS:

208.

Määritä edellisen tehtävän potenssisarja, kun alkuehtona on a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$. Piirrä laskemasi osasumman kuvaaja. Ratkaise sama alkuarvoprobleema myös numeerisesti ja piirrä saadun numeerisen ratkaisun kuvaaja.

VASTAUS:

209.

Laske approksimaatioita edellisen tehtävän alkuehtoja vastaavien potenssisarjojen suppenemissäteille. Riippuuko suppenemissäde alkuehdosta? Voidaanko suppenemissäde jotenkin päätellä edellisen tehtävän kuvaajista?

VASTAUS:

6.2. Numeerisesta ratkaisemisesta

210.

Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleema a) $y' = y$, $y(0) = 1$, b) $y' = -y$, $y(0) = 1$. Valitse askelpituudeksi $h = 0.2$ ja tarkasteluväliksi $[0,5]$. Vertaa tulosta tarkkaan ratkaisuun. Millä tavalla a- ja b-kohta ovat tarkkuuden suhteen erilaisia?

VASTAUS:

211.

Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleema $y' = 2xy + 1$, $y(0) = 1$. Valitse a) $h = 0.1$, b) $h = 0.01$. Piirrä ratkaisukäyrät välillä $[0,1]$. Muodosta myös yhtälön tarkka ratkaisu.

VASTAUS:

212.

Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleema $y' = |y-1|$, $y(0) = 0$. Laske $y(3)$. Käytä eri askelpituuksia. Muodosta myös yhtälön tarkka ratkaisu.

VASTAUS:

213.

Ratkaise alkuarvoprobleema $y' = y$, $y(0) = 1$ numeerisesti välillä $[0,5]$ a) Eulerin menetelmällä, b) Runge – Kutta -algoritmilla. Valitse askelpituudeksi $h = 0.1$. Piirrä tarkan ratkaisun ja numeeristen ratkaisujen kuvaajat.

VASTAUS:

214.

Kirjoita differentiaaliyhtälöä $y'' + xy' + y = 0$ vastaava ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmä. Muodosta tämän perusteella Eulerin menetelmän mukaiset numeeriset ratkaisukaavat, kun alkuehdot ovat $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

VASTAUS: $y' = z$, $z' = -xz - y$;
$y_0 = 1$, $z_0 = 2$, $y_{n+1} = y_n + hz_n$, $z_{n+1} = z_n + h(-nhz_n - y_n)$.

215.

Differentiaaliyhtälö

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2$$

esittää erästä populaatiomallia; tässä p on populaation koko ja $\alpha,\ \beta > 0$ ovat vakioita. Olkoon $\alpha = \beta = 10$ ja $p_0 = 0.1$. Muodosta Eulerin menetelmän mukainen iteraatiokaava differentiaaliyhtälön numeerista ratkaisemista varten. Ratkaise yhtälö käyttäen askelpituuksia $h = 0.18,\ h = 0.23,\ h = 0.25,\ h = 0.30$. Havainto?

VASTAUS:

216.

Tutki alkuarvoprobleeman $y' = 2xy$, $y(0) = 1$ numeerista ratkaisemista Eulerin menetelmällä. Laske $y(5)$ käyttämällä askelpituuksia $h = 1$, $h = 0.5$ ja $h = 0.1$.

VASTAUS:

217.

Ratkaise alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y \end{cases}, \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3$$

numeerisesti. Piirrä saatujen ratkaisukäyrien kuvaajat.

VASTAUS:

218.

Piirrä alkuarvotehtävän $y' = (1+x)y + 1 - 3x + x^2$, $y(0) = 0.06$ ratkaisukäyrät käyttäen sekä Eulerin että Rungen–Kuttan menetelmiä. Käytä askelpituutta $h = 0.04$. Ohjelmoi menetelmät itse. Havaintoja?

219.

Määritä $y(1.5)$ ja piirrä funktion $y = y(x)$ kuvaaja välillä $[0, 1.5]$, kun funktio y on alkuarvotehtävän $y' = y^2 - \cos x$, $y(0) = 1$ ratkaisu. Käytä Rungen–Kuttan menetelmää ja askelpituutta $h = 0.1$. Onko yhtälö ratkaistavissa alkeisfunktioiden avulla? Voiko sen ratkaista symbolisesti laskentaohjelmalla?

VASTAUS: 3.03.

220.

Piirrä Rungen–Kuttan menetelmällä alkuarvoprobleeman $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ ratkaisu välillä $x \in [0, 300]$. Käytä askelpituutta 0.1. Havaintosi? Puolita askelpituus ja piirrä kuvaaja uudelleen. Entä jos tällä puolitetulla askelpituudella piirrettäisiinkin ratkaisu välillä $x \in [0, 1000]$? Mikä voisi olla selityksenä havaituille ilmiöille?

221.

Tutki laskentaohjelma avulla differentiaaliyhtälön $y' = x^2 - y^2$ yleistä ratkaisua. Pyri erityisesti selvittämään, miten käyttäytyvät ne yksittäisratkaisut, jotka toteuttavat alkuehdot a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$. Tarkastele sekä symbolista (algebrallista) että numeerista ratkaisemista.

222.

Tutki alkuarvoprobleeman $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ numeerista ratkaisua Eulerin menetelmällä välillä $[0, 200]$ ja Rungen – Kuttan menetelmällä välillä $[0, 500]$. Käytä kummassakin tapauksessa kiinteää askelpituuutta $h = 0.1$. Osaatko selittää syntyvän ilmiön?

223.

Tutki alkuarvoprobleeman $y' = x - y^2$, $y(0) = a$ ratkaisuja kokeellisesti antamalla vakiolle a erilaisia arvoja ja ratkaisemalla yhtälö numeerisesti laskentaohjelmalla. Määritä kolmen desimaalin tarkkuudella sellainen arvo, jonka eri puolilla ratkaisut käyttäytyvät oleellisesti eri tavoin. Tutki, onko olemassa ratkaisua, joka jää eri tavoin käyttäytyvien ratkaisujen väliin. Löydätkö tarkan arvon vakion a kriittiselle arvolle?

224.

Tutkitaan differentiaaliyhtälön $y' = x - y^2$ ratkaisua alkuehdoilla $y(0) = 3$, $y(0) = 1$, $y(0) = 0$, $y(0) = -0.7$ ja $y(0) = -0.75$. Piirrä nämä alkuehdot toteuttavien ratkaisukäyrien kuvaajat samaan kuvaan välillä $x \in [0, 9]$. Sopiva y-akselin väli on $[-3, 3]$. Havaintosi? Mitä tällainen tilanne voisi tarkoittaa, jos kokeellisesti (jossain mittauksessa) olisi saatu alkuarvo $y(0) = -0.75$?

6.3. Approksimointi funktioilla

225.

Etsi approksimaatio alkuarvoprobleeman $y' = xy$, $y(0) = 1$ ratkaisulle Picardin – Lindelöfin menettelyllä. Valitse aloitusfunktioksi vakiofunktio $y_0(x) = 1$. Vertaa tulosta tarkan ratkaisun Maclaurinin polynomiin.

VASTAUS:

226.

Tarkastellaan alkuarvoprobleemaa $y' = f(x, y) = 2x + 5y$, $y(0) = 0$. Osoita, että funktio f täyttää tasaisen Lipschitzin ehdon. Laske probleeman ratkaisulle Picardin – Lindelöfin menetelmän mukaiset approksimaatiot $y_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$, kun valitaan $y_0(x) = 0$.

VASTAUS: $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 + \frac{5}{3}x^3$, $y_3(x) = x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{12}x^4$,
$y_4(x) = x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + \frac{25}{12}x^5$.

227.

Laske Picardin – Lindelöfin menettelyllä approksimoivia polynomeja alkuarvoprobleeman $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$ ratkaisulle.

VASTAUS: $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3$, $y_2(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7$, etc.

228.

Alkuarvoprobleeman $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisua voidaan approksimoida funktiojonolla, joka muodostetaan rekursiolla

$$y_0(x) = y_0 = \text{vakio}; y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Approksimoi tällä tavoin alkuarvoprobleeman $y'' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ratkaisua. Differentiaaliyhtälö on ensin kirjoitettava normaaliryhmän muotoon $Y' = F(x, Y)$, missä Y ja F ovat vektoriarvoisia funktioita. Laske funktiojonon alkupään termejä ja vertaa niiden antamaa approksimaatiota alkuarvoprobleeman tarkkaan ratkaisuun (joka on lausuttavissa Airyn funktioiden avulla).