3. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

3.1. Reaali- ja kompleksifunktiot

43.

Olkoon f monotoninen ja rajoitettu välillä $]a,b[$. Todista, että raja-arvot $\lim_{x\to a+} f(x)$ ja $\lim_{x\to b-} f(x)$ ovat olemassa. Todista myös, että $\lim_{x\to c-} f(x)$ ja $\lim_{x\to c+} f(x)$ ovat olemassa, kun $c \in\,]a,b[$.

VASTAUS:

44.

Todista monotonisuuden määritelmään nojautuen, että seuraavat funktiot ovat monotonisia mainitulla välillä: a) $x^3+3x-3,\ x\in\mathbb{R}$, b) $\frac{x+2}{1-x},\ x\in]1,\infty[$.

VASTAUS:

45.

Olkoot f ja g kasvavia välillä I. Todista, että $f+g$ on kasvava välillä I.

VASTAUS:

46.

Olkoot f ja g kasvavia välillä I. Todista, että $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ on kasvava välillä I.

VASTAUS:

47.

Olkoon f aidosti kasvava joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$ ja $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Todista: $x>0 \implies f(x)>0$.

VASTAUS:

48.

Osoita, että jos funktiot f ja g ovat parillisia, niin myös $f+g$ ja fg ovat parillisia. Osoita edelleen, että jos f ja g ovat parittomia, niin $f+g$ on pariton ja fg parillinen.

VASTAUS:

49.

Funktio f olkoon määritelty reaaliakselin välillä $]-a,a[$. Todista, että f voidaan kirjoittaa muotoon $f = f_1 + f_2$, missä f_1 on parillinen ja f_2 pariton funktio.

VASTAUS: $f(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

50.

Olkoon L reaalimuuttujan funktion f jakso. Mitä muita jaksoja funktiolla on?

VASTAUS:

51.

Olkoon $f_1(x) = x+1,\ f_2(x) = x-2,\ f_3(x) = 2x+3,\ f_4(x) = x^2+x$. Muodosta seuraavat yhdistetyt funktiot: a) $f_4(f_3(f_2(x)))$, b) $f_2(f_3(f_4(x)))$, c) $f_4(f_1(f_1(x^3)))$.

VASTAUS: a) $4x^2 - 2x$; b) $2x^2 + 2x + 1$; c) $x^6 + 5x^3 + 6$.

52.

Olkoon $f(x) = ax^2 + bx + c$. Määritä a, b ja c siten, että $f(x+2) = f(x) + 2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

VASTAUS: $a = 0,\ b = 1,\ c \in \mathbb{R}$.

53.

Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat:

$$\text{a) } f(x) = 1 + x - |x|, \qquad \text{b) } f(x) = |x+1| + |x-1| - 2|x|, \qquad \text{c) } f(x) = |x^2 - 1| - x^2.$$

VASTAUS:

3.2. Funktion raja-arvo

54.

Todista suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että $\lim_{x\to 10} x^2 = 100$.

VASTAUS:

55.

Todista suoraan raja-arvon määritelmään perustuen, että $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$, ts. etsi annettua lukua ε vastaava δ.

VASTAUS:

56.

Todista, että $\lim_{x\to a} f(x) = A$, jos ja vain jos $\lim_{x\to a}[f(x) - A] = 0$.

VASTAUS:

57.

Olkoon $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pisteen a aidossa ympäristössä sekä lisäksi $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$. Todista, että $\lim_{x\to a} g(x) = A$.

VASTAUS:

58.

Olkoon $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ja olkoon $g(x)$ rajoitettu eräässä pisteen a ympäristössä. Todista:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = 0.$$

VASTAUS:

59.

Olkoon $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0$ ja älköön $\lim_{x\to a} g(x)$ olko olemassa. Todista, että $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ ei ole olemassa.

VASTAUS:

60.

Määritä seuraavat raja-arvot:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right),$$
$$\text{c) } \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\sqrt{29-2x}-5}, \qquad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x+3x^2}-\sqrt{1-x}}{x}$$
$$\text{e) } \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{13+\sqrt{x}}-4}, \qquad \text{f) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+2x}-\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x^3}}.$$

VASTAUS: a) -8; b) -1; c) 5; d) $\frac{3}{2}$; e) 8; f) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

61.

Määrittele täsmällisesti

$$\text{a) } \lim_{x\to -\infty} f(x) = A, \qquad \text{b) } \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty, \qquad \text{c) } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$
$$\text{d) } \lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty, \qquad \text{e) } \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty.$$

VASTAUS:

62.

Etsi jokaista positiivilukua ε kohti jokin luku M siten, että

$$x > M \implies \frac{x^2+x}{x^4+2} < \varepsilon.$$

VASTAUS: Esimerkiksi $M = \max\{1, \sqrt{2/\varepsilon}\}$.

63.

Määritä $\inf S$, kun

$$S = \left\{ M \mid |x| > M \implies \left|\frac{4x-3}{2x-5} - 2\right| < \frac{1}{1000} \right\}.$$

Mitä tekemistä tällä on raja-arvon määritelmän kanssa?

VASTAUS:

64.

Olkoon $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$. Todista seuraavat raja-arvoa koskevat tulokset suoraan määritelmään perustuen:

$$\text{a) } \lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \implies \lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \infty,$$
$$\text{b) } \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to \infty} (f(x)g(x)) = -\infty,$$
$$\text{c) } \lim_{x\to -\infty} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty \implies \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

VASTAUS:

65.

Todista, että jos toinen raja-arvoista $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim_{x\to 0+} f(1/x)$ on olemassa, niin on toinenkin ja raja-arvot ovat yhtä suuret.

VASTAUS:

66.

Määritä seuraavat raja-arvot:

$$\text{a) } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7-3x^5}{x^5(1-3x^2+x)}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x),$$

$$\text{c) } \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right), \qquad \text{d) } \lim_{x\to 7-} \frac{x^6-6x^5}{x-7},$$

$$\text{e) } \lim_{x\to 5-} \frac{x^2\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}, \qquad \text{f) } \lim_{x\to 5+} \frac{x^2|x-5|}{x-5}.$$

VASTAUS: a) $-\frac{1}{3}$; b) 0; c) 1; d) $-\infty$; e) -25; f) 25.

67.

Määritä

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},$$

$$\text{c) } \lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}, \qquad \text{d) } \lim_{x\to a+} \frac{x^2-a^2-2\sqrt{x-a}}{\sqrt[3]{x^3-a^3}+\sqrt{x-a}}.$$

VASTAUS: a) 1; b) $\frac{1}{n}$; c) $\frac{5}{3}$; d) 0, jos $a \neq 0$, -2, jos $a = 0$.

68.

Olkoon

$$f(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{5}{1+yx^5}.$$

Osoita, että $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

VASTAUS: Jos $x \neq 0$, niin $f(x) = 0$.

69.

Olkoon $ABCD \neq 0$. Määritä

$$\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty} \frac{Ax+By}{Cx+Dy}\right) - \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty} \frac{Ax+By}{Cx+Dy}\right).$$

VASTAUS: $\frac{A}{C} - \frac{B}{D}$.

70.

Tutki numeerisesti raja-arvoa

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{13+\sqrt{x}}-4}.$$

VASTAUS:

71.

Tutki raja-arvoa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

sijoittamalla muuttujalle x yhä lähempänä origoa olevia arvoja.

VASTAUS:

72.

Tutki raja-arvoa

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$$

sijoittamalla muuttujalle x yhä lähempänä origoa olevia arvoja.

VASTAUS:

73.

Piirrä funktion

$$y(x) = (\sin x)^{\tan^2 x}$$

kuvaaja pisteen $\frac{\pi}{2}$ ympäristössä. Miten funktion arvo tässä pisteessä on määriteltävä, jotta siitä tulisi jatkuva? Mikä mahtaa olla raja-arvon tarkka arvo?

VASTAUS:

74.

Hahmottele funktioiden

$$\sin \frac{1}{x} \qquad \text{ja} \qquad x \sin \frac{1}{x}$$

kuvaajat, ja tutki funktioiden raja-arvoja origossa.

VASTAUS:

75.

Määritellään reaalimuuttujan reaaliarvoiset funktiot f ja g seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Määritä funktioiden raja-arvot origossa. Onko yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$ raja-arvoa origossa?

VASTAUS:

3.3. Funktion jatkuvuus

76.

Funktio

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

on määritelty, kun $x \neq 2$. Mikä on sovittava $f(2)$:n arvoksi, jotta funktio olisi jatkuva kaikilla muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla?

VASTAUS: $f(2) = \frac{1}{3}$.

77.

Olkoon

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \le a, \\ 1-x^2, & \text{kun } x > a, \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^3-4x, & \text{kun } x > -2, \\ a-x, & \text{kun } x \le -2. \end{cases}$$

Määritä ne a:n arvot, joilla vastaava f on jatkuva kaikilla muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla. Piirrä kuvaajat.

VASTAUS: a) Kaksi ratkaisua: $a = -2$, $a = 1$, b) $a = -2$.

78.

Olkoon f jatkuva arvolla $x = 0$ ja $f(0) > 0$. Osoita, että on olemassa positiiviluvut m ja δ siten, että $|x| < \delta \implies f(x) > m$.

VASTAUS:

79.

Todista, että jos f on jatkuva ja g on epäjatkuva, kun $x = a$, niin $f+g$ on epäjatkuva tässä pisteessä.

VASTAUS:

80.

Todista, että jos pisteessä $x = a$ funktio f on jatkuva ja $\neq 0$ sekä g epäjatkuva, niin tulo fg on epäjatkuva.

VASTAUS:

81.

Määritellään funktio floor : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\text{floor}(x) = \text{suurin kokonaisluku, joka on} \le x.$$

Olkoon f tämän avulla määritelty funktio:

$$f(x) = \text{floor}(x) + \text{floor}(-x) + 1.$$

Tutki funktioiden floor ja f jatkuvuutta. Piirrä funktioiden kuvaajat. Ovatko funktiot jaksollisia?

VASTAUS:

82.

Määritä $\sup S$, kun

$$S = \left\{ \delta \;\middle|\; |x-3| < \delta \implies \left| \frac{x-1}{2x+2} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{100} \right\}.$$

Mitä tekemistä tällä tehtävällä on funktion jatkuvuuden kanssa?

VASTAUS:

83.

Funktio f olkoon määritelty ja aidosti kasvava välillä $[a,b]$. Funktion arvojoukko olkoon väli $[f(a), f(b)]$. Osoita, että funktio on jatkuva.

VASTAUS:

84.

Olkoon funktio f jatkuva välillä $]-1,1[$ ja $f(0)=0$. Funktio g olkoon määritelty (mutta ei välttämättä jatkuva) samalla välillä ja se toteuttakoon tällä välillä ehdon $g(x) \geq m > 0$, missä m on vakio. Osoita, että funktio f/g on jatkuva origossa. Osoita esimerkillä, että tulos ei välttämättä pidä paikkaansa, jos funktiota g koskeva ehto muutetaan muotoon $g(x) > 0$. (Valitse esimerkiksi $f(x) = x$ ja tämän jälkeen sopiva origossa epäjatkuva g.)

VASTAUS:

85.

Etsi seuraavien funktioiden käänteisfunktioiden lausekkeet:

$$\text{a) } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \text{b) } y = \sqrt{1-\sqrt{x}} + \sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

VASTAUS: a) $x = \frac{1}{2}(y^2 - 2 \pm y\sqrt{y^2-4})$; b) $x = y^2 - \frac{1}{4}y^4$ ($\sqrt{2} \leq y \leq 2$).

86.

Osoita, että jos

$$y = f(x) = \frac{ax-b}{cx-a},$$

niin $x = f(y)$. Oletetaan, että $a^2 \neq bc$. Miksi?

VASTAUS:

87.

Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ tai } x \geq 1\}$ ja $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leq 2\}$. Osoita, että funktio $f : A \to B$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{kun } x \leq 0, \\ \frac{x+1}{x}, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$$

on jatkuva bijektio, mutta sen käänteisfunktio ei ole jatkuva.

VASTAUS:

88.

Olkoon f joukossa $\mathbb{R}_+$ aidosti kasvava ja jatkuva sekä olkoon $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Olkoon $y = g(x) = xf(x)$ kaikilla $x > 0$. Osoita, että funktiolla g on arvoilla $y > 0$ määritelty käänteisfunktio.

VASTAUS:

3.4. Jatkuvat reaalifunktiot

89.

Todista, että jos funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I, niin f on jatkuva välillä I.

VASTAUS:

90.

Osoita tasaisen jatkuvuuden määritelmään nojautuen, että x^2 a) on tasaisesti jatkuva välillä $[0,1]$, b) ei ole tasaisesti jatkuva joukossa $\{x \mid x \geq 0\}$.

VASTAUS:

91.

Osoita tasaisen jatkuvuuden määritelmään nojautuen, että $\sqrt{100+x^2}$ on tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

VASTAUS:

92.

Todista, että jos funktiot f ja g ovat tasaisesti jatkuvia välillä I, niin $f+g$ on tasaisesti jatkuva välillä I.

VASTAUS:

93.

Anna esimerkki a) avoimella välillä jatkuvasta, ei-rajoitetusta funktiosta, b) suljetulla välillä määritellystä ja rajoitetusta funktiosta, jonka arvojoukolla ei ole maksimia eikä minimiä.

VASTAUS:

94.

Todista, että joukolla

$$\left\{ \frac{x}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

on maksimi ja minimi.

VASTAUS:

95.

Olkoon funktio f joukossa $\mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu. Todista, että joukolla

$$\left\{ \frac{f(x)}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

on maksimi tai minimi (tai molemmat).

VASTAUS:

96.

Osoita esimerkeillä, että seuraavat lauseet eivät päde, jos luovutaan olettamasta, että väli $[a,b]$ on suljettu tai että funktio f on jatkuva:

a) *Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio f on tällä välillä rajoitettu, ts. on olemassa luku $M > 0$, jolle pätee $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$.*

b) *Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$. Tällöin f saavuttaa suuurimman ja pienimmän arvonsa välillä $[a,b]$, ts. on olemassa $x_1, x_2 \in [a,b]$ siten, että*

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1), \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2).$$

VASTAUS:

97.

Olkoon f suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio, $f(a) \neq 0$, $f(b) = 0$. Todista, että joukolla $\{x \in]a,b] \mid f(x) = 0\}$ on minimi. Päteekö väite, jos sallitaan, että $f(a) = 0$?

VASTAUS: Ei päde, jos $f(a) = 0$.

98.

Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$. Osoita, että funktion arvojoukko $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ on suljettu väli tai sisältää vain yhden pisteen.

VASTAUS:

99.

Olkoon funktio f jatkuva ja $\neq 0$ välillä I. Osoita, että f saa välillä I vain joko positiivisia tai negatiivisia arvoja.

VASTAUS:

100.

Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 5x^2 + 3 = 0$ on ainakin kolme reaalijuurta ja rajoita nämä väleille, joiden pituus on 0.1.

VASTAUS:

101.

Osoita, että yhtälöllä $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$ on ainakin kaksi reaalijuurta ja rajoita nämä väleille, joiden pituus on 0.1.

VASTAUS: