6. Derivaatta

6.1. Derivaatta ja differentiaali

172.

Olkoon $f(x) = x^4$. Etsi derivaatan määritelmän avulla $f'(-3)$.

VASTAUS: $f'(-3) = -108$.

173.

Muodosta funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta suoraan määritelmän mukaan, so. tarkastelemalla erotusosamäärän raja-arvoa.

VASTAUS:

174.

Todista: Jos f on derivoituva kohdassa a ja c on vakio, niin cf on derivoituva kohdassa a ja $\dfrac{d}{dx}(cf) = c\dfrac{df}{dx}$.

VASTAUS:

175.

Todista: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

VASTAUS:

176.

Osoita esimerkillä, että $f+g$ voi olla kaikkialla derivoituva, vaikka funktioilla f ja g ei ole millään muuttujan arvolla derivaattaa.

VASTAUS:

177.

Funktio f on määritelty välillä $]-1,1[$ ja derivaatta f' on olemassa pisteessä $x = 0$ (mutta ei välttämättä muualla). Määritä tarkasti perustellen

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2) - f(-x^2)}{x^2}.$$

VASTAUS: $2f'(0)$.

178.

Funktio f toteuttakoon eräässä origon ympäristössä epäyhtälön $|f(x)| \leq x^2$. Todista, että $f'(0)$ on olemassa ja määritä sen arvo.

VASTAUS: Erotusosamäärälle saadaan seuraavaa: $|(f(h) - f(0))/h| = |f(h)/h| \leq |h|$, mistä seuraa $f'(0) = 0$.

179.

Olkoon $f(x) = x^3$. Määritä $\sup S$, kun

$$S = \left\{ \delta > 0 \mid |\Delta x| < \delta \implies \left| \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(a) \right| < \frac{1}{100} \right\}$$

ja a) $a = 0$, b) $a = 1$, c) $a = 3$. Miten tehtävä liittyy derivaatan määritelmään?

VASTAUS: a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{10}(\sqrt{226} - 15) \approx 0.00333$; c) $\frac{1}{10}(\sqrt{901} - 30) \approx 0.00167$.

180.

Olkoon $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 2$. Todista, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että $0 < |x| < \delta \implies 1 < f(x)/x < 3$.

VASTAUS:

181.

Oletetaan, että $f'(a)$ on olemassa. Määritä seuraavat raja-arvot:

$$\text{a)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a-h)}{h}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}.$$

VASTAUS: a) $f'(a)$, b) $f(a) - af'(a)$.

182.

Olkoon $f''(a)$ olemassa. Määritä

$$\lim_{t\to 0} \frac{f'(a+\alpha t) - f'(a+\beta t)}{t}.$$

VASTAUS: $(\alpha - \beta)f''(a)$.

183.

Muodosta funktion $f(x) = 1/x^2$ differentiaali ja korjaustermi pisteessä $x = 2$. Totea, että korjaustermin ε-funktiolla on vaadittu raja-arvo-ominaisuus.

VASTAUS:

184.

Muodosta funktion f lisäys $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, vastaava differentiaali $df(x,h)$ ja korjaustermi $h\varepsilon(x,h)$, kun

$$\text{a)}\ f(x) = x^3, \qquad \text{b)}\ f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \qquad \text{c)}\ f(x) = \frac{2x}{5+x}, \qquad \text{d)}\ f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Tarkista, onko ε-funktiolla derivoituvuudessa vaadittu raja-arvo-ominaisuus.

VASTAUS: a) $df(x,h) = 3x^2h$, $\varepsilon(x,h) = 3xh + h^2$; b) $df(x,h) = (6x-5)h$, $\varepsilon(x,h) = 3h$; c) $df(x,h) = \dfrac{10h}{5+x^2}$, $\varepsilon(x,h) = -\dfrac{10h}{(5+x)^2(5+x+h)}$; d) $df(x,h) = -\dfrac{2h}{x^3}$, $\varepsilon(x,h) = \dfrac{3xh+2h^2}{x^3(x+h)^2}$.

185.

Laske differentiaalin avulla likiarvo luvulle a) $\sqrt{217}$, b) $\sqrt[3]{727}$, c) $\sqrt[6]{730}$, d) $\sqrt{0.039}$. Määritä oikaisun itseisarvolle likimääräinen yläraja. Saadaanko ylä- vai alalikiarvo?

VASTAUS: a) $15 - \frac{4}{15} \approx 14.733$, $\frac{16}{15^3} < 5 \cdot 10^{-3}$, ylälikiarvo; b) $9 - \frac{2}{243} \approx 8.99177$, $\frac{8}{9^6} < 2 \cdot 10^{-5}$, ylälikiarvo; c) $3 + \frac{1}{1458} \approx 3.0006859$, $\frac{5}{4 \cdot 3^{13}} < 8 \cdot 10^{-7}$, ylälikiarvo; d) $0.2 - \frac{5}{2} \cdot 0.001 = 0,19750$, $\frac{125}{4}(0.001)^2 < 4 \cdot 10^{-5}$, ylälikiarvo.

186.

Olkoon

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x+3}.$$

Laske differentiaalin avulla likiarvo luvulle $f(7.005)$. Montako oikeaa desimaalia on vastauksessa?

VASTAUS: 4.7046500, 6 oikeaa desimaalia.

187.

Laske likiarvo luvulle $\sqrt{90}$ valitsemalla a) $x = 81$ ja $\Delta x = 9$, b) $x = 100$ ja $\Delta x = -10$. Vertaa tulosta oikeaan 4-desimaaliseen likiarvoon 9.4868.

VASTAUS: a) 9.5, b) 9.5.

188.

Osoita differentiaalikehitelmää käyttäen, että funktio $f(x) = 3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ ei ole differentioituva kohdassa $x = 2$.

VASTAUS:

6.2. Derivoimissääntöjä

189.

Derivoi seuraavat funktiot:

a) $(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$, b) $(4x+1)^2(x^2-2)^3$, c) $\dfrac{x^2}{1-x+x^2}$,

d) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$, e) $\dfrac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}}$, f) $\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

VASTAUS: a) $4x(x^2-1)$, b) $2(4x+1)(x^2-2)^2$, c) $\dfrac{x(2-x)}{(1-x+x^2)^2}$, d) $\dfrac{x^2-2cx+c(a+b)-ab}{(x-c)^2}$, e) $\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$, f) $\dfrac{5(1+x^2)^4(x^2+2x-1)}{(1+x)^6}$.

190.

Olkoon

$$f(x) = \frac{(a^2+x^2)^3}{(b-x^3)^2}.$$

Määritä derivaatan $f'(x)$ nollakohdat.

VASTAUS: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a^2}$, jos $a \neq 0,\ b \neq 0$; $x_1 = 0$, jos $a = 0,\ b \neq 0$; ei nollakohtia, jos $a \neq 0,\ b = 0$; $f'(x) \equiv 0$, jos $a = b = 0$.

191.

Määritä $f^{(n)}(x)$, kun $f(x)$ on

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, b) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, c) $f(x) = \dfrac{a}{(b+cx)^2}$.

VASTAUS: a) $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, b) $(-1)^n\dfrac{2(n!)}{(1+x)^{n+1}}$, c) $(-1)^n\dfrac{ac^n(n+1)!}{(b+cx)^{n+2}}$.

192.

Polynomilla $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ on nollakohta, joka on myös sen derivaattojen p' ja p'' nollakohta. Osoita, että p on erään polynomin kuutio.

VASTAUS: $p(x) = (x + \frac{a}{3})^3$.

193.

Osoita, että jos $(x-c)^2$ on polynomin $p(x)$ tekijä, niin $p'(c) = 0$. Etsi sellaiset luvut a, että polynomilla $x^3 + 8x^2 - 44x + a$ on kaksinkertainen nollakohta.

VASTAUS: $a = 48$ tai $a = -9680/27$.

194.

Funktion $x^3 + ax^2 + bx + c$ derivaatta häviää, kun $x = -1$ ja funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen. Määritä a, b ja c.

VASTAUS: $a = 0,\ b = -3,\ c = 0$.

195.

Olkoot f ja g kolmesti derivoituvia ja $w(x) = f(x)g(x)$. Laske $w''(x)$ ja $w'''(x)$.

VASTAUS: $w''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x),\ w'''(x) = f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x)$.

196.

Piirrä funktion $y = f(x)$ kuvaaja, etsi käänteiskuvauksen $x = g(y)$ lauseke ja piirrä kuvaaja seuraavien funktioiden tapauksissa; laske myös $f'(x_0)$ ja $g'(y_0)$ annetuissa pisteissä. Miten derivaattojen arvot sopivat yhteen käänteisfunktion derivaattaa koskevan lauseen kanssa?

a) $f(x) = 1 - 3x,\ x_0 = 2,\ y_0 = -5,$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = \dfrac{1}{3},\ y_0 = \dfrac{3}{2},$

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ x_0 = -4,\ y_0 = -\dfrac{5}{3},$ d) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-7},\ x_0 = 8,\ y_0 = 29.$

VASTAUS: a) $\frac{1}{3}(1-y),\ -3,\ -\frac{1}{3}$, b) $1 - \frac{1}{y},\ \frac{9}{4},\ \frac{4}{9}$, c) $\frac{1-y}{1+y},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{9}{2}$, d) $\frac{7y+5}{y-3},\ -26,\ -\frac{1}{26}$.

197.

Derivoi seuraavat funktiot:

a) $x\sqrt{1-x^2}$, b) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, d) $\sqrt[4]{(2x^2 - x^3)^3}$,

e) $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, f) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, g) $\sqrt{\dfrac{a+bx}{a-bx}}$.

VASTAUS: a) $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\frac{7}{8}x^{-1/8}$, c) $\dfrac{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x}}$, d) $\frac{3}{4}\dfrac{4x - 3x^2}{\sqrt[4]{2x^2 - x^3}}$,

e) $\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$, f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$, g) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}(a-bx)}$.

198.

Määritä funktion $y = x^2 - 4x - 3$ käänteiskuvauksen ylemmän haaran derivaatta arvolla $y = 2$ a) käänteisfunktion derivoimissäännön avulla, b) määrittämällä käänteiskuvauksen lauseke.

VASTAUS: $\frac{1}{6}$.

199.

Piirrä funktion $y(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ kuvaaja. Millä reaaliakselin alueilla funktiolla on käänteisfunktio $x(y)$? Piirrä käänteisfunktioiden kuvaajat ja etsi niiden lausekkeet. Laske derivaatat $y'(3)$ ja $x'(62)$. Miten nämä suhtautuvat toisiinsa? Miksi?

VASTAUS: $x_1(y) = -\sqrt{1+\sqrt{2+y}},\ y \geq -2;\quad x_2(y) = -\sqrt{1-\sqrt{2+y}},\ -2 \leq y \leq -1;$
$x_3(y) = \sqrt{1-\sqrt{2+y}},\ -2 \leq y \leq -1;\quad x_4(y) = \sqrt{1+\sqrt{2+y}},\ y \geq -2;$
$y'(3) = 96,\ x_4'(62) = 1/96.$

200.

Olkoon $s = s(t)$ derivoituva funktio siten, että $t = f(s)$. Lausu $s'(t)$ muuttujan s avulla, kun a) $f(s) = 3 - 2s + s^3$, b) $f(s) = \frac{1-s^4}{s+s^4}$.

VASTAUS: a) $\dfrac{1}{3s^2-2}$, b) $-\dfrac{(s-s^2+s^3)^2}{1-2s+3s^2}$.

201.

Olkoon $f'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Todista, että jos $g(y)$ on funktion f käänteisfunktio, niin $g'(y) = \frac{1}{y}$. Älä käytä hyväksi tietoa, että f itse asiassa on muotoa $f(x) = Ce^x$, C vakio.

VASTAUS: $g'(y) = 1/f'(g(y)) = 1/f(g(y)) = 1/y$.

202.

Funktio f olkoon funktion g käänteisfunktio, jolloin $f(x) = y \iff g(y) = x$. Olkoon g kahdesti derivoituva ja $g'(y) \neq 0$. Osoita:

$$f''(x) = -\frac{g''(y)}{g'(y)^3}.$$

Johda vastaava kaava derivaatalle $f'''(x)$ olettaen, että g on kolmesti derivoituva.

VASTAUS: $f'''(x) = [-g'(y)g'''(y) + 3g''(y)^2]/g'(y)^5$.

203.

Olkoon $y = y(x)$ kahdesti derivoituva funktio siten, että a) $x^3 + y^3 = 1$, b) $y^2 - 2xy + b^2 = 0$, c) $x^4 + y^4 = x^2y^2$, d) $x^4y^4 = x^4 + y^4$. Lausu $y''(x)$ muuttujan x ja funktion y avulla.

VASTAUS: a) $-2xy^{-5}$, b) $b^2(x-y)^{-3}$, c) laskulla ei ole sisältöä, sillä välttämättä on $x = y = 0$, d) $5y^9x^{-6}$.

6.3. Alkeisfunktioiden derivaatat

204.

Johda funktion $\overline{\text{arc}}\tan$ derivaatan lauseke lähtemällä tangentin derivaatasta.

VASTAUS:

205.

Johda funktioiden $\operatorname{arsinh} x$ ja $\overline{\operatorname{ar}}\cosh x$ derivaatat käänteisfunktion derivoimissääntöä käyttäen.

VASTAUS:

206.

Derivoi funktiot

$$\text{a) } e^{\sqrt{x}}, \qquad \text{b) } \sqrt{x(e^x+1)}.$$

VASTAUS: a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; b) $\dfrac{(x+1)e^x+1}{2\sqrt{x(e^x+1)}}$.

207.

Hermiten polynomit määritellään seuraavasti:

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Laske $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ ja $H_3(x)$. Osoita, että näillä on ominaisuudet

$$\text{a) } H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \qquad \text{b) } H_n(x) = H'_{n-1}(x) - 2xH_{n-1}(x).$$

VASTAUS:

208.

Osoita, että funktio

$$y = e^{-\frac{\alpha t}{2m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}\, t\right)$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

VASTAUS:

209.

Derivoi seuraavat funktiot:

$$\text{a) } \ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \qquad \text{b) } \ln(\ln x), \qquad \text{c) } \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

VASTAUS: a) $\dfrac{a}{a^2-x^2}$; b) $\dfrac{1}{x\ln x}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

210.

Olkoon $z(x) = \ln y(x)$, missä $y(x)$ on yhtälön $x = e^y + y$ määrittelemä funktio. Laske $z'(e+1)$.

VASTAUS: $1/(e+1)$.

211.

Olkoot f ja g kaksi kahdesti derivoituvaa funktiota, jotka toteuttavat identiteetin

$$af(x)g(x) + bf(x) + cg(x) + d \equiv 0,$$

missä a, b, c ja d ovat vakioita. Olkoot lisäksi f, sen derivaatta f' ja vakiot a ja c positiivisia. Osoita, että jos vakiot täyttävät sopivan ehdon, niin

$$\mathrm{D}\ln\frac{f'(x)}{g'(x)} = k\sqrt{f'(x)g'(x)},$$

missä k on vakio. Mikä on ehto ja mikä on vakio k?

VASTAUS: Ehto $ad-bc>0$, $k=2a/\sqrt{ad-bc}$.

212.

Derivoi funktiot

$$\text{a) } a^{-1/x}, \qquad \text{b) } a^{\tan x}, \qquad \text{c) } \log_x a, \qquad \text{d) } \log_2(\log_3(\ln x)).$$

VASTAUS: a) $\dfrac{\ln a}{x^2}\,a^{-1/x}$; b) $\dfrac{\ln a}{\cos^2 x}\,a^{\tan x}$; c) $-\dfrac{\ln a}{x(\ln x)^2}$; d) $\dfrac{1}{(\ln 2)x(\ln x)\ln(\ln x)}$.

213.

Derivoi funktiot

$$\text{a) } x^x, \qquad \text{b) } x^{1/x}, \qquad \text{c) } x^{\ln x}, \qquad \text{d) } x^{x^x}, \qquad \text{e) } (x^x)^x, \qquad \text{f) } a^x x^a.$$

VASTAUS: a) $x^x(\ln x+1)$; b) $x^{1/x-2}(1-\ln x)$; c) $2x^{\ln x-1}\ln x$; d) $x^{x^x}x^x[1/x+\ln x+(\ln x)^2]$; e) $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$; f) $a^x x^{a-1}(x\ln a+a)$.

214.

Piirrä käyrä $x^y=y^x$. Laske y' implisiittisellä derivoinnilla.

VASTAUS: $y'=\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

215.

Derivoi seuraavat funktiot:

$$\text{a) } \cos^n\left(\frac{a}{x}\right), \qquad \text{b) } \sqrt{\sin\sqrt{\frac{1}{x}}}, \qquad \text{c) } \cot\sqrt[3]{1+x^2}, \qquad \text{d) } \cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

VASTAUS: a) $\dfrac{na}{x^2}\cos^{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)\sin\frac{a}{x}$; b) $-\dfrac{\cos\sqrt{1/x}}{4x\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{1/x}}}$; c) $-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}\sin^2(\sqrt[3]{1+x^2})}$;
d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\sin\left(2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$.

216.

Derivoi funktio $\cos x e^{\sin x}$.

VASTAUS: $e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$.

217.

Derivoi funktiot

$$\text{a) } \ln\cos\sqrt{\frac{1}{x}}, \qquad \text{b) } x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x).$$

VASTAUS: a) $\dfrac{\tan\sqrt{1/x}}{2x\sqrt{x}}$; b) $2\cos(\ln x)$.

218.

Määritä funktion

$$f(x) = \frac{27}{\sin x} + \frac{64}{\cos x}$$

arvo sellaisissa välin $]0,\pi/2[$ pisteissä, missä $f'(x) = 0$.

VASTAUS: 125.

219.

Millä muuttujan arvoilla funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x(1-x)}, & \text{kun } x \neq 0,\ x \neq 1, \\ 0, & \text{kun } x = 0,\ x = 1 \end{cases}$$

on derivoituva?

VASTAUS: $x \neq 1$.

220.

Lausu implisiittisen derivoinnin avulla $y'(x)$ muuttujien x ja y funktiona, kun a) $y + x = \sin y \cos x$, b) $yx = \sin y + \cos x$.

VASTAUS: a) $\dfrac{\sin x \sin y + 1}{\cos x \cos y - 1}$; b) $\dfrac{\sin x + y}{\cos y - x}$.

221.

Yhtälö $y = \sin(x + ay)$, missä $a \neq -1$, määrittelee funktion $y = y(x)$ sen pisteen ympäristössä, missä yhtälön kuvaaja leikkaa positiivisen x-akselin lähinnä origoa. Määritä funktion derivaatta tässä pisteessä. Piirrä kuvaaja.

VASTAUS: $-1/(a+1)$.

222.

Derivoi funktio

$$f(x) = 2\,\overline{\arctan}\, x + \overline{\arcsin}\, \frac{2x}{1+x^2}.$$

Millä muuttujan arvoilla derivaatta on $= 0$? Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS:

223.

Derivoi funktiot

a) $\overline{\arccos}\, \dfrac{1}{x}$, b) $\overline{\arcsin}\sqrt{1-x^4}$, c) $\overline{\arccos}\, \dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$,

d) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \overline{\arccos}\, x$, e) $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\,\overline{\arctan}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\tan x\right)$, f) $(x^2-2)\,\overline{\arcsin}\,\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$.

VASTAUS: a) $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; b) $-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; c) $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{sgn}(\sin x)}{|a+b\cos x|}$;
d) $\dfrac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; e) $\dfrac{1}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$; f) $2x\,\overline{\arcsin}\,\dfrac{x}{2}$.

224.

Määritellään funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ asettamalla $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, kun $x\neq 0$, ja $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$. Onko funktio jatkuva? Laske funktion derivaatta origossa. Osoita, että derivaattafunktio f' ei ole jatkuva origossa.

VASTAUS:

225.

Osoita, että funktio

$$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+\cos x\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $y''+y=\tan x$. Luvut C_1 ja C_2 ovat vakioita.

VASTAUS:

226.

Derivoi funktiot

$$\text{a) } \ln(\cosh x),\qquad \text{b) } \overline{\arctan}(\tanh x),\qquad \text{c) } \tanh(\ln x).$$

VASTAUS: a) $\tanh x$; b) $\dfrac{1}{\cosh 2x}$; c) $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

227.

Derivoi funktiot

$$\text{a) } \operatorname{arsinh} e^x,\qquad \text{b) } \overline{\text{ar}}\cosh\frac{1}{x},\qquad \text{c) } 2\operatorname{artanh}(\tan\frac{x}{2}),\qquad \text{d) } \operatorname{arcoth}\sqrt{1+x^4}.$$

VASTAUS: a) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; b) $-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; c) $\dfrac{1}{\cos x}$; d) $-\dfrac{2}{x\sqrt{1+x^4}}$.

6.4. Derivaatan ominaisuuksia

228.

Osoita derivoimalla, että funktioiden

$$\frac{5x-9}{x+3}\quad\text{ja}\quad -\frac{2(x+15)}{x+3}$$

erotus on vakio. Mikä on vakion arvo?

VASTAUS: Yhteinen derivaatta $24(x+3)^{-2}$, vakio $=7$.

229.

Olkoon f derivoituva välillä I. Osoita, että derivaatan f' kahden peräkkäisen nollakohdan välissä voi olla korkeintaan yksi funktion f nollakohta.

VASTAUS:

230.

Olkoon p polynomi, jonka nollakohdat ovat reaaliset. Todista, että derivaattapolynomin p' nollakohdat ovat myös reaaliset.

VASTAUS:

231.

Määritä väliarvolauseessa esiintyvä ξ funktiolle a) $\sqrt{x}$ välillä $[36,49]$; b) Ax^2+Bx+C välillä $[a,b]$.

VASTAUS: a) $\xi = \frac{169}{4}$, b) $\xi = \frac{1}{2}(a+b)$.

232.

Määritä väliarvolauseessa esiintyvä ξ funktiolle

$$\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

välillä $[a,b]$, joka ei sisällä epäjatkuvuuskohtaa $x=-\frac{D}{C}$. Oletetaan $AD-BC \neq 0,\ C\neq 0$.

VASTAUS: Jos $C>0,\ b<-D/C$ tai $C<0,\ a>-D/C$, niin $\xi=\frac{1}{C}[-D-\sqrt{(Ca+D)(Cb+D)}]$; jos $C>0,\ a>-D/C$ tai $C<0,\ b<-D/C$, niin $\xi=\frac{1}{C}[-D+\sqrt{(Ca+D)(Cb+D)}]$.

233.

Käyrän $y=x^4$ pisteiden $(-1,1)$ ja (t,t^4) kautta asetetaan suora. Väliarvolauseen mukaan on käyrällä piste (c,c^4), jossa tangentti on mainitun suoran suuntainen. Tässä $c=c(t)$. Määritä $c(t)$ ja $c'(t)$, kun a) $t=0$, b) $t=1$.

VASTAUS: a) $c(0)=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $c'(0)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$; b) $c(1)=0,\ c'(1)=\infty$.

234.

Funktio f olkoon jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva arvolla $x_0 \in]a,b[$. Näytä, että on olemassa luku $M>0$ siten, että

$$x\in[a,b] \implies |f(x)-f(x_0)| \leq M|x-x_0|.$$

VASTAUS:

235.

Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva samalla välillä paitsi mahdollisesti arvolla $x_0\in[a,b]$. Todista, että jos $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ on olemassa ja on $=A$, niin $f'(x_0)$ on olemassa ja on $=A$.

VASTAUS:

236.

Olkoon f derivoituva suljetulla välillä $[a,b]$ ja $f'(a)=A$ sekä $f'(b)=B$. Todista, että jos C on lukujen A ja B välissä oleva arvo, niin on olemassa arvo $c\in]a,b[$ siten, että $f'(c)=C$.

VASTAUS:

237.

Osoita:

$$0<a<b \implies 1-\frac{a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b}{a}-1.$$

VASTAUS: Väliarvolause.

238.

Todista, että jos $p > 0$, niin yhtälöllä $x^3 + px + q = 0$ on vain yksi reaalijuuri.

VASTAUS:

239.

Olkoon f joukossa $\mathbb{R}_+$ positiivinen, aidosti kasvava ja derivoituva. Näytä, että myös funktio $g(x) = [f(1/x)]^{-1}$ on joukossa $\mathbb{R}_+$ aidosti kasvava.

VASTAUS: $g'(x) = x^2 f'(1/x) f(1/x)^{-2}$.

240.

Määritä

$$\inf\left\{ a \mid x > a \implies \ln x > \frac{x-1}{x+1} \right\}.$$

VASTAUS: 1.

241.

Osoita, että a) funktio $2\ln x + x^2 - 4x + 1$ on kasvava, b) funktio $\dfrac{1}{x} + \ln x - x$ on vähenevä.

VASTAUS:

242.

Olkoon $a \in [0, 1[$ vakio. Todista:

$$x \in [a, 1] \implies \overline{\mathrm{arc}}\sin x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1-x}{\sqrt{1-a^2}}.$$

VASTAUS:

243.

Todista: $\overline{\mathrm{arc}}\tan x > x - \frac{1}{3}x^3$ kaikilla $x > 0$.

VASTAUS:

244.

Määritä ne positiiviluvut a, joilla yhtälöllä $x + a\sin x - 2 = 0$ on ratkaisu välillä $[0, \pi/2]$.

VASTAUS: $a \geq (4 - \pi)/2$.

245.

Tutki seuraavien funktioiden ääriarvoja:

a) $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$, b) $y = x + \dfrac{a^2}{x}$,

c) $y = x + \sqrt{1-x}$, d) $y = x\sqrt{2-x^2}$.

VASTAUS: a) Jos $a > 0$, suht. maksimi $y(\frac{a}{3}) = \frac{4}{27}a^3$, suht. minimi $y(a) = 0$; jos $a < 0$, suht. maksimi $y(a) = 0$, suht. minimi $y(\frac{a}{3}) = \frac{4}{27}a^3$; b) suht. maksimi $y(-a) = -2a$, suht. minimi $y(a) = 2a$ $(a > 0)$; c) abs. maksimi $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$, suht. minimi $y(1) = 1$; d) abs. maksimi $y(1) = 1$, abs. minimi $y(-1) = -1$, suht. maksimi $y(-\sqrt{2}) = 0$, suht. minimi $y(\sqrt{2}) = 0$.

246.

Määritä seuraavien funktioiden ääriarvot ja piirrä kuvaajat:

$$\text{a) } |\sin x| + \cos x, \qquad \text{b) } \cos(\sin x), \qquad \text{c) } \frac{1+\sin x}{1-\cos x},$$
$$\text{d) } \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}, \qquad \text{e) } \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}.$$

VASTAUS: a) Maksimi $y(\pm\frac{\pi}{4} + n2\pi) = \sqrt{2}$, minimit $y(\pi + n2\pi) = -1$, $y(n2\pi) = 1$; b) maksimi $y(n\pi) = 1$, minimi $y(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \cos 1$; c) minimi $y(-\frac{\pi}{2} + n2\pi) = 0$; d) maksimi $y(\frac{5\pi}{4} + n2\pi) = -2\sqrt{2}$, minimi $y(\frac{\pi}{4} + n2\pi) = 2\sqrt{2}$; e) maksimi $y(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 1$, minimi $y(n\pi) = 0$.

247.

Määritä seuraavien funktioiden ääriarvot ja piirrä kuvaajat:

$$\text{a) } y = x^{1-\ln x}, \qquad \text{b) } y = xe^{1/x}, \qquad \text{c) } y = (x-1)^{x-1}.$$

VASTAUS: a) Maksimi $y(\sqrt{e}) = \sqrt[4]{e}$; b) minimi $y(1) = e$; c) minimi $y(1+\frac{1}{e}) = e^{-1/e}$.

248.

Määritä funktion $y = 4\tanh x + \coth x$ ääriarvot. Piirrä kuvaaja.

VASTAUS: Maksimi $y(-\frac{1}{2}\ln 3) = -4$, minimi $y(\frac{1}{2}\ln 3) = 4$.

249.

Tutki funktiota $f(x) = x^x$, $x > 0$. Määritä ääriarvot, piirrä kuvaaja.

VASTAUS:

250.

Tutki, onko funktiolla $f(x) = (1-e^x)^7(1-x)^{13}$ suhteellista ääriarvoa origossa. Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS: Ei.

251.

Olkoot kaikkialla jatkuvan funktion ääriarvot oleellisia. Osoita, että maksimit ja minimit esiintyvät vuorotellen.

VASTAUS:

252.

Olkoot käyrät $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ alaspäin kuperia välillä $[a,b]$. Todista, että käyrä $y = f(x) + g(x)$ on alaspäin kupera mainitulla välillä.

VASTAUS:

253.

Määritä käyrän

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

ääriarvopisteet ja käännepisteet. Millä muuttujan arvoilla käyrä on alaspäin, millä ylöspäin kupera? Piirrä kuvaaja.

VASTAUS:

254.

Tutki seuraavien käyrien kuperuutta ja määritä käännepisteet:

a) $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$, b) $y = (x^2 - 6x)^5$, c) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$,

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$, e) $y = a - \sqrt[3]{x-b}$.

VASTAUS: a) Alaspäin kupera välillä $]-3,2[$, käännepisteet $(-3,294)$ ja $(2,114)$; b) alaspäin kupera väleillä $]-\infty,0[$, $]2,4[$, $]6,\infty[$, käännepisteet $(0,0)$, $(2,-32768)$, $(4,-32768)$, $(6,0)$; c) alaspäin kupera väleillä $]-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}[$, $]1,\infty[$, käännepisteet $(-2-\sqrt{3},\frac{1}{4}(1-\sqrt{3}))$, $(-2+\sqrt{3},\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}))$, $(1,1)$; d) alaspäin kupera väleillä $]-\infty,-3a[$, $]0,3a[$, käännepisteet $(-3a,-\frac{9a}{4})$, $(0,0)$, $(3a,\frac{9a}{4})$ $(A > 0)$; e) alaspäin kupera välillä $]b,\infty[$, käännepiste (b,a).

255.

Määritä käyrän $y = \sin^4 x$ ääriarvo ja käännepisteet.

VASTAUS: Maksimi $y(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 1$, minimi $y(n\pi) = 0$, käännepisteet $(\pm\frac{\pi}{3} + n\pi, \frac{9}{16})$.

256.

Määritä käyrien a) $y = xe^{-x}$, b) $y = e^{2x}\sin^2 x$ ääriarvo- ja käännepisteet. Piirrä kuvaajat.

VASTAUS: a) Maksimi $y(1) = 1/e$, käännepiste $(2, 2e^{-2})$; b) maksimi $y(\frac{3\pi}{4} + n\pi) = \frac{1}{2}\exp(\frac{3\pi}{2} + n2\pi)$, minimi $y(n\pi) = 0$; käännepisteet $(\frac{7\pi}{12} + n\pi, \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\exp(\frac{7\pi}{6} + n2\pi)$, $(\frac{11\pi}{12} + n\pi, \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})\exp(\frac{11\pi}{6} + n2\pi)$.

257.

Määritä käyrältä

$$y = e^{(x-1)^2}$$

pisteet, joiden etäisyydellä pisteestä $(1,a)$ on ääriarvo. Määritä ääriarvojen lukumäärä ja laatu parametrin a eri arvoilla.

VASTAUS: Jos $a \leq \frac{3}{2}$, niin piste $(1,1)$ antaa minimin; jos $a > \frac{3}{2}$, niin piste $(1,1)$ antaa maksimin ja pisteet $\left(1 \pm \sqrt{\ln\frac{a+\sqrt{a^2-2}}{2}}, \frac{a+\sqrt{a^2-2}}{2}\right)$ minimin.

258.

Millä vakioiden a ja b arvoilla piste $(1,3)$ on käyrän $y = ax^3 + bx^2$ käännepiste?

VASTAUS: $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$.

259.

Olkoon kaikkialla kahdesti derivoituva funktio f kasvava ja alaspäin kupera. Osoita, että funktio $g(x) = f(x^2)$ on alaspäin kupera.

VASTAUS:

260.

Osoita, että käyrän $y = \frac{12}{5}a^4x^5 - 6a^3x^4 + 4a^2x^3$ käännepisteet ovat samalla suoralla. Määritä tämän suoran yksikösuuntavektori.

VASTAUS:

261.

Millä vakion a arvoilla käyrällä

$$y = \frac{x-a}{(x+a)^2}$$

on käännepisteitä? Määritä myös ääriarvopisteet ja asymptootit ja piirrä kuvaaja.

VASTAUS: Käännepiste $(5a, \frac{1}{9a})$, kun $a \neq 0$; absoluuttinen maksimi $y(3a) = \frac{1}{8a}$, kun $a > 0$; absoluuttinen minimi $y(3a) = \frac{1}{8a}$, kun $a < 0$; suoraviivaiset asymptootit $x = -a$, $y = 0$.