7. Derivaatan sovellutuksia

7.1. Derivaatta tangentin kulmakertoimena

262.

Määritä a, b ja c siten, että käyrät $y = x^2 + ax + b$ ja $y = cx - x^2$ sivuavat toisiaan pisteessä $(1, 3)$.

VASTAUS: $a = 0,\ b = 2,\ c = 4.$

263.

Määritä pisteen $(-4, \frac{23}{2})$ kautta kulkevien käyrän $9y = x^2$ normaalien yhtälöt.

VASTAUS: $x - 2y + 27 = 0,\ 3x + 2y - 11 = 0,\ 3x + 4y - 34 = 0.$

264.

Osoita implisiittistä derivointia käyttäen, että yhtälön

$$x^5 + x^3y^3 + y^5 = 1$$

määrittelemällä käyrällä on ainakin yksi vaakasuora ja yksi pystysuora tangentti. Missä käyrän pisteissä nämä sijaitsevat? Piirrä kuvio.

VASTAUS: $(0, 1)$, $(1, 0)$. Kaksi muutakin pistettä on!

265.

Yhtälö $x^y = y^x$ määrittää käyrän ainakin joillakin arvoilla x. Osoita, että piste $(2, 4)$ sijaitsee tällä käyrällä ja määritä tähän pisteeseen asetetun käyrän tangentin kulmakerroin. Piirrä käyrä.

VASTAUS:

266.

Laske käyrien $y = \overline{\text{arc}}\sin x$ ja $y = \overline{\text{arc}}\cos x$ tangenttien välinen kulma käyrien leikkauspisteessä.

VASTAUS: $\overline{\text{arc}}\tan(2\sqrt{2})$.

267.

Määritä arvoa $x = a$ vastaaviin käyrien $y = \sinh x$ ja $y = \cosh x$ pisteisiin asetettujen a) tangenttien, b) normaalien leikkauspisteet.

VASTAUS: a) $(a + 1, \sinh a + \cosh a)$; b) $(a + \sinh a \cosh a, 0)$.

7.2. Ääriarvotehtävät

268.

Määritä seuraavien funktioiden suhteelliset ja absoluuttiset ääriarvot; piirrä kuvaajat:

a) $1 - 6x + 9x^2 - 5x^3$, b) $\dfrac{9 + 2x - x^2}{1 + x}$,

c) $\dfrac{x^4 + x + 1}{x^4 + 1}$, d) $\sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

VASTAUS: a) Ei ääriarvoja; b) ei ääriarvoja; c) abs. maksimi $f(1/\sqrt[4]{3}) = 1 + \frac{1}{4}\sqrt[4]{27}$, abs. minimi $f(-1/\sqrt[4]{3}) = 1 - \frac{1}{4}\sqrt[4]{27}$; d) suht. maksimi $f(2) = \sqrt[3]{4}$, suht. minimi $f(0) = 0$.

269.

Määritä seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetulla välillä:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad (x+1)^3(x-3)^3, \quad [-2,4], \\ &\text{b)} \quad |x^5 - 80x + 1|, \quad [-1,1], \\ &\text{c)} \quad \frac{2-x}{5-4x+x^2}, \quad [-100,2]. \end{aligned}$$

VASTAUS: a) $125,\ -64$; b) $80,\ 0$; c) $\frac{1}{2}$ 0.

270.

Tutki, millä vakion a arvoilla funktiolla

$$f(x) = \frac{x^4 + ax^2}{(x^2+7)^2}$$

on sellainen ominaisuus, että eräällä muuttujan x arvolla se saa absoluuttisen maksimiarvonsa.

VASTAUS: $a > 14$.

271.

Olkoot x ja y kaksi ei-negatiivista lukua, joiden summa on $\frac{5}{6}$. Määritä lausekkeen $x\sqrt{x} + \sqrt{y}$ suurin ja pienin mahdollinen arvo.

VASTAUS: $\frac{7}{3\sqrt{6}},\ \frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$.

272.

Määritä funktion

$$f(x) = (\sin x)^{\sin x}, \quad x \in \,]0, \pi[,$$

pienin yläraja (supremum) ja suurin alaraja (infimum).

VASTAUS:

273.

Kolmannen asteen Tshebyshevin polynomin $T_3(x)$ lauseke voidaan välillä $[-1,1]$ esittää muodossa $T_3(x) = \cos(3\,\overline{\text{arc}}\cos x)$. Esitä lauseke muodossa $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ja määritä polynomin suurin ja pienin arvo välillä $[-1,1]$.

VASTAUS:

274.

Olkoot x ja y kaksi positiivista lukua, joiden summa on 18. Määritä lausekkeelle $x^4 + y^2$ supremum, infimum, maksimi ja minimi, mikäli tällainen on olemassa.

VASTAUS: supremum $= 104976$, infimum $=$ minimi $= 272$, maksimi ei ole olemassa.

275.

Määritä niistä lieriöistä, jotka voidaan piirtää R-säteisen pallon sisään, a) tilavuudeltaan, b) vaipaltaan, c) kokonaispinta-alaltaan suurin.

VASTAUS: Pohjan säde r, korkeus h: a) $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$; b) $r = \frac{1}{\sqrt{2}}R$, $h = \sqrt{2}R$; c) $r = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}R$, $h = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R$.

276.

Tasakylkisen kolmion kannan pituus on $12\sqrt{3}$ ja huipusta piirretyn korkeusjanan pituus 11. Tältä korkeusjanalta on valittu piste P siten, että siitä kolmion kärkiin piirrettyjen etäisyyksien summa on mahdollisimman pieni. Missä suhteessa P jakaa korkeusjanan?

VASTAUS: Huipusta lukien $5:6$.

277.

Suorakulmion yhtenä kärkenä on käyrän

$$(ax)^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$$

piste P ja muina kärkinä pisteen P:n symmetriapisteet x-akselin, y-akselin ja origon suhteen. Määritä suorakulmion pinta-alan ääriarvot, kun P liikkuu ko. käyrällä.

VASTAUS: Maksimi $\frac{b^2}{2a}$, kun $P \mathrel{\widehat{=}} (\frac{b}{2\sqrt{2}a}, \frac{b}{2\sqrt{2}})$; minimi 0, kun P on koordinaattiakselilla.

278.

Ympyrän sektorin piiri olkoon vakio $= p$. Tutki pinta-alan ääriarvoja.

VASTAUS: Maksimi $\frac{p^2}{16}$, kun keskuskulma on 2; minimi 0.

279.

Kolmion kahden sivun välinen jana puolittaa kolmion alan. Tutki janan pituuden ääriarvoja.

VASTAUS: Sivut olkoon a ja b ($a \geq b$), välinen kulma φ. Maksimi $\sqrt{a^2 + b^2/4 - ab\cos\varphi}$;
minimi $\sqrt{ab(1-\cos\varphi)}$, jos $a \leq 2b$, ja $\sqrt{a^2/4 + b^2 - ab\cos\varphi}$, jos $a > 2b$.

280.

On valmistettava lieriö, jonka tilavuus on vakio v m^3. Pohjat maksavat a $\mathrm{mk/m^2}$ ja vaippa b $\mathrm{mk/m^2}$. Tutki hinnan ääriarvoja.

VASTAUS: Minimihinta $3\sqrt[3]{2\pi ab^2v^2}$ mk.

281.

Määritä annetun ympyrän segmentin sisään piirretyn alaltaan suurimman suorakulmion sivujen pituudet.

VASTAUS: Ympyrän säde R, segmentin korkeus h ja $k = |R-h|$. Jännettä vastaan kohtisuora sivu x ja sen suuntainen sivu y: Jos $0 < h \leq R$, niin $x = \frac{1}{4}(\sqrt{8R^2+k^2} - 3k)$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{8R^2 - 2k^2 - 2k\sqrt{8R^2+k^2}}$. Jos $R < h \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}R$, niin $x = \frac{1}{4}(\sqrt{8R^2+k^2} + 3k)$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{8R^2 - 2k^2 + 2k\sqrt{8R^2+k^2}}$. Jos $\frac{3+\sqrt{3}}{3}R < h \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}R$, niin $x = 2k$, $y = 2\sqrt{R^2-k^2}$. Jos $\frac{2+\sqrt{2}}{2}R < h < 2R$, niin $x = \sqrt{2}R$, $y = \sqrt{2}R$.

282.

Suoran $qy = m^2$ ja paraabelin $qy = x^2$ (m, q positiivisia) rajoittamaan alueeseen asetetaan puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaiset sivut ovat x-akselin suuntaiset. Miten suuri puolisuunnikkaan ala voi enintään olla?

VASTAUS: $\dfrac{32m^3}{27q}$.

283.

Suoran ympyräkartion pohjaympyrän keskipiste on kiinteän suoran lieriön pohjaympyrän keskipisteessä ja kartion huippu on lieriön toisen pohjaympyrän keskipisteessä. Määritä kartion ja lieriön pohjien säteiden suhde siten, että kartion ulkopuolelle jäävän lieriön osan ja lieriön ulkopuolelle jäävän kartion osan tilavuuksien summa on mahdollisimman pieni.

VASTAUS: $\sqrt[3]{2}$.

284.

Suora ympyräkartio asetetaan pallon sisään siten, että kartion huippu ja pohjaympyrän kehä sijaitsevat pallon pinnalla. Miten monta prosenttia kartion tilavuus voi enintään olla pallon tilavuudesta? Vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.

VASTAUS:

285.

Kuvioon, jota rajoittavat x-akseli ja käyrä $y = 12 + 4x - x^2$, piirretään kolmio ABC siten, että piste A on origossa, pisteet B ja C käyrällä sekä sivu BC x-akselin suuntainen. Millä etäisyydellä sivun BC on oltava x-akselista, jotta kolmion ala olisi mahdollisimman suuri?

VASTAUS: $\frac{32}{3}$.

286.

Käyrälle $y = \sin x$ piirretään muuttujan arvoja x_0 ja $x_0 + 2\pi$ vastaaviin pisteisiin tangentit ja normaalit. Määritä niiden rajoittaman suorakulmion alan maksimi- ja minimiarvo.

VASTAUS: Maksimi $2\pi^2$, minimi 0.

287.

Olkoon suorakulmaisessa kolmiossa muuttuvan terävän kulman α viereinen kateetti vakio $= a$, vastainen kateetti $b = b(\alpha)$ ja hypotenuusa $c = c(\alpha)$. Millä muuttujan α arvolla lauseke $2c(\alpha) - \sqrt{3}b(\alpha)$ saa mahdollisimman pienen arvon?

VASTAUS: $\alpha = \pi/3$.

288.

Suoran tien varressa on kohtisuorassa tien suuntaa vastaan mainostaulu, jonka leveys on 10 metriä ja etäisyys tiestä 20 metriä. Määritä suurin (vaakasuoran tason) kulma, jossa tiellä liikkuja taulun näkee. (Tien leveyttä ei oteta huomioon.)

VASTAUS:

289.

Olkoon annettuna pisteet $A \,\widehat{=}\, (1,0)$ ja $B \,\widehat{=}\, (t,0)$, missä $t > 1$. Piste C sijaitsee positiivisella y-akselilla site, että kulma $\angle ACB = \alpha$ on mahdollisimman suuri. Määritä t siten, että kulman α maksimiarvo on $\pi/4$.

VASTAUS: $3 + 2\sqrt{2}$.

290.

Määritä sen kolmion pinta-alan suhteelliset ja absoluuttiset ääriarvot, jota rajoittavat käyrän $y = \ln x$ pisteeseen piirretty normaali, tähän pisteeseen piirretty pystysuora ja x-akseli.

VASTAUS: Absoluuttinen minimi 0 pisteessä $(1,0)$; suhteellinen maksimi $2/e^2$ pisteessä $(e^2,2)$.

291.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja olkoon i imaginaariyksikkö. Osoita, että funktiolla $f(x) = |x-i| + |x-1-2i|$ on absoluuttinen minimi ja määritä sen arvo. Mikä on tehtävän geometrinen tulkinta?

VASTAUS: Minimi $f(1/3) = \sqrt{10}$.

292.

Osoita, että $\sin x \geq 2x/\pi$, kun $x \in [0,\pi/2]$.

VASTAUS:

293.

Todista: a) $e^x \geq ex$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;   b) $e^x > 1 + x + x^2/2$ kaikilla $x > 0$.

VASTAUS:

294.

Millä arvoilla $a \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$(e^{x+a} + e^{-x})^2 > 4(a+1) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}\ ?$$

VASTAUS: $a \neq 0$.

295.

Osoita, että $x - \ln x - 1 \geq 0$, kun $x > 0$. Osoita tämän avulla, että jos positiivilukujen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ summa on $= p$, niin lukujen tulo on ≤ 1.

VASTAUS:

7.3. Derivaatta nopeutena

296.

Piste P liikkuu pitkin x-akselia negatiiviseen suuntaan vakionopeudella v_1 ja piste Q pitkin y-akselia negatiiviseen suuntaan vakionopeudella v_2. Hetkellä $t = 0$ piste P on kohdassa $(a,0)$ ja Q kohdassa $(0,b)$ ($a > 0,\ b > 0$). Millä hetkellä välimatka PQ on lyhin? Mikä on lyhin välimatka?

VASTAUS: $t = \dfrac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$,   lyhin etäisyys $\frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.

297.

Talon korkeus on 25 metriä. Sen katolta pudotetaan kivi ilman alkunopeutta ja yhtä sekuntia myöhemmin toinen kivi alkunopeudella v_0. Kuinka v_0 on valittava, jotta kivet putoaisivat maahan samanaikaisesti? (Ilmanvastus voidaan jättää huomiotta.)

VASTAUS: $v_0 \approx 13$ m/s.

298.

Mies heittää sillalta kiven suoraan ylöspäin. Kolmen sekunnin kuluttua kivi ohittaa pudotessaan miehen ja kahden sekunnin kuluttua tästä putoaa veteen. Mikä oli kiven saama alkunopeus ja mikä sillan korkeus?

VASTAUS: 14.7 m/s, 49 m.

299.

Astronautti pudottaa kiven kallionkielekkeeltä ja toteaa sen putoavan kolmessa sekunnissa alas kallion juurelle. Kuinka korkea kallio on, jos ollaan a) Marsissa ($g = 3.8$ m$/$s^2), b) Saturnuksessa ($g = 11.5$ m$/$s^2)?

VASTAUS: a) 17.1 m; b) 51.8 m.

300.

Edellisen tehtävän astronautin kumppani on kallion juurella ja heittää kiven takaisin, jotta koe voitaisiin toistaa. Mikä on pienin alkunopeus, mitä hänen on käytettävä a) Marsissa, b) Saturnuksessa?

VASTAUS: a) 11.4 m/s; b) 34.5 m/s.

301.

Santaa valutetaan kartionmuotoiseen kasaan nopeudella 0.2 m^3/min. Kitka säilyttää kartion pohjan säteen suhteen korkeuteen vakiona $\frac{2}{3}$. Mikä on korkeuden kasvunopeus, kun pohjan säde on 2 m?

VASTAUS: $\frac{0.2}{4\pi}$ m/min ≈ 1.6 cm/min.

302.

Kuution pinta-ala kasvaa nopeudella 50 cm^2/s. Mikä on tilavuuden kasvunopeus, kun särmän pituus on 20 cm?

VASTAUS: 250 cm^3/s.

303.

Tietyllä ajanhetkellä pallon säde on 3 cm ja pallon tilavuus kasvaa nopeudella 2 cm^3/s. Millä nopeudella kasvaa pallon ala?

VASTAUS: $4/3$ cm^2/s.

304.

Suoralla ympyräkartiolla on puolen kuutiometrin vakiotilavuus. Pohjan säde kasvaa vakionopeudella 10 cm/s, jolloin kartion korkeus vastaavasti pienenee. Määritä pienenemisnopeus kartion korkeuden ollessa 100 cm.

VASTAUS:

305.

Miehen pituus on 180 cm. Hän lähtee kävelemään 6 metrin korkeudella olevan katulyhdyn alta vakionopeudella 1 m/s. Mikä on miehen varjon pituuden muuttumisnopeus, kun hän on kulkenut a) 3 metriä, b) 15 metriä? Mikä on varjon kärjen nopeus?

VASTAUS: Molemmat tapaukset: pituuden muuttumisnopeus $\frac{3}{7}$ m/s ≈ 0.43 m/s, kärjen nopeus $\frac{10}{7}$ m/s ≈ 1.43 m/s.

306.

Lentokone lentää vaakasuorasti 600 metrin korkeudessa vakionopeudella 600 km/t suoraan katselijan yli. Olkoon α pystysuunnan ja näkösäteen välinen kulma. Laske kulman α muuttumisnopeus, kun a) $\alpha = 45^\circ$, b) $\alpha = 0^\circ$. Milloin nopeus on suurimmillaan?

VASTAUS: a) $7.96^\circ/\mathrm{s}$; b) $15.92^\circ/\mathrm{s}$; suurimmillaan kun $\alpha = 0^\circ$.

307.

Lausu eksentrisyyden e funktiona se kulma ω, jossa ellipsin polttopisteiden etäisyys näkyy pikkuakselin päätepisteestä. Ellipsi muuttaa ajan t kuluessa jatkuvasti muotoaan siten, että $\dfrac{de}{dt}$ on vakio $= p$. Laske kulman ω muuttumisnopeus hetkellä, jolloin $e = 4/5$.

VASTAUS: $\omega = 2\,\overline{\mathrm{arc}}\sin e$; $10p/3$.

7.4. Yhtälön iteratiivinen ratkaiseminen

308.

Etsi Newtonin menetelmällä polynomin $x^3 + 8x^2 - 44x - 10$ kaikki nollakohdat.

VASTAUS:

309.

Tutki kokeilemalla, voidaanko polynomin $x^3 + 8x^2 - 44x - 10$ nollakohdat löytää iteraatiolla $x_{n+1} = \frac{1}{44}(x_n^3 + 8x_n^2 - 10)$. Miten tämä iteraatiokaava on muodostettu?

VASTAUS:

310.

Etsi yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu 10 desimaalin tarkkuudella käyttäen iteraatiota $x_{n+1} = \cos x_n$. Onnistuuko ratkaisu iteraatiolla $x_{n+1} = \overline{\mathrm{arc}}\cos x_n$?

VASTAUS:

7.5. L'Hospitalin sääntö

311.

Tarkista, että yleistettyä väliarvolausetta voidaan soveltaa osamäärään f/g seuraavissa tapauksissa ja määritä väliarvot ξ:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } f(x) = \cos 2x, \quad g(x) = \sin x, \quad \text{väli } [0, \tfrac{\pi}{2}];\\
&\text{b) } f(x) = \sinh x, \quad g(x) = \cosh x, \quad \text{väli } [0, 6];\\
&\text{c) } f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad \text{väli } [1, 2];\\
&\text{d) } f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = x^3 - 3x, \quad \text{väli } [-3, 2].
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) $\xi = \pi/6$; b) $\xi = 3$; c) $\xi = 14/9$; d) $\xi = 1/3$.

312.

Yleistettyä väliarvolausetta yritetään soveltaa osamäärään f/g seuraavissa tapauksissa:

a) $f(x)=x^2, \quad g(x)=x^3, \quad$ väli $[-2,3]$;

b) $f(x)=3+(x-2)(x-1)^2, \quad g(x)=1+x(x-1)^2, \quad$ väli $[0,2]$.

Totea, että väliarvoa ξ ei voida löytää. Onko lause virheellinen?

VASTAUS:

313.

Määritä l'Hospitalin sääntöä käyttäen raja-arvot

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln\tan x}{\cos 2x}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin(\alpha x)-\sin(\beta x)}, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\arcsin x - x},$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 4}\frac{4e^{4-x}-x}{\sin(\pi x)}, \qquad \text{e)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{3x^4}, \qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)}{1-\cos(\sin x)}.$$

Suorita myös numeerisia kokeiluja.

VASTAUS: a) -1; b) 1; c) -1; d) $-5/\pi$; e) $1/36$; f) 2.

314.

Määritä seuraavat raja-arvot l'Hospitalin sääntöä käyttäen:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty} x^2\ln(\cos\frac{\pi}{x}), \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty} x(a^{1/x}-1) \quad (a>0), \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}.$$

VASTAUS: a) $-\pi^2/2$; b) $\ln a$; c) $1/16$.

315.

Määritä seuraavat raja-arvot l'Hospitalin sääntöä käyttäen:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x\ln x}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})} \quad (\alpha>0,\ \beta>0), \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0+}\sin x\ln x.$$

VASTAUS: a) 0; b) α/β; c) 0.

316.

Määritä seuraavat raja-arvot:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0+} x^3 e^{1/x}, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}(1+x^3)^{4/x^3}, \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{3}{x}\right)^x,$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 0+} x^{\ln(1+x)}, \qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0+}(e^x-1)^{\sin x}, \qquad \text{g)}\ \lim_{x\to 0+}(\tan x)^{\sin x}, \qquad \text{h)}\ \lim_{x\to\infty}(1+2x)^{e^{-x}}.$$

Suorita myös numeerisia kokeiluja.

VASTAUS: a) 1; b) ∞; c) e^4; d) 1; e) 1; f) 1; g) 1; h) 1.

317.

Määritä l'Hospitalin säännön avulla raja-arvot

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x-\sin x-\frac{x^3}{3}}{\cos x-\cosh x+x^2}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}.$$

VASTAUS: a) 0;   b) $1/\sqrt{e}$.

318.

Olkoon $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$. Todista, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \text{mutta } \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ei ole olemassa.}$$

Miksi l'Hospitalin sääntöä ei voi käyttää?

VASTAUS: L'Hospitalin säännössä *oletetaan*, että $\lim f'(x)/g'(x)$ on olemassa.

319.

Todista, että jos funktio f on derivoituva ja $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = A$, niin $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ ja $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

VASTAUS: Sovelletaan l'Hospitalin sääntöä funktioihin $e^x f(x)$ ja e^x.