

9. Määrätty integraali

9.1. Riemannin – Darboux’n ylä- ja alasummat

368.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x$ välillä $[0, 1]$ ja tämän välin jakoa $p = \{0, a, 1\}$, missä $0 < a < 1$. Määritä alasumma \underline{S}_p ja yläsumma \overline{S}_p . Määritä $\sup \underline{S}_p$ ja $\inf \overline{S}_p$ em. tyyppiä oleville jaoille. Seuraako saatujen lukujen erisuuruudesta, että funktio f ei ole integroitava välillä $[0, 1]$?

VASTAUS: $\underline{S}_p = a - a^2$, $\overline{S}_p = a^2 - a + 1$; $\sup \underline{S}_p = \frac{1}{4}$, $\inf \overline{S}_p = \frac{3}{4}$.

369.

Olkoon p välin $[a, b]$ jako, jossa on n osaväliä. Osoita: $|p| \rightarrow 0 \implies n \rightarrow \infty$. Onko käänteinen implikaatio tosi?

VASTAUS: Käänteinen implikaatio ei ole tosi.

370.

Olkoon funktio f rajoitettu välillä $[a, b]$ ja integroitava jokaisella välillä $[a, c]$, missä $a < c < b$. Todista, että f on integroitava välillä $[a, b]$.

VASTAUS:

371.

Todista, että jos funktio f on integroitava suljetulla välillä $[a, b]$, niin se on integroitava myös jokaisella tämän välin suljetulla osavälillä.

VASTAUS:

372.

Olkoon funktio f rajoitettu välillä $[a, b]$. Oletetaan, että on olemassa vakio $K > 0$ siten, että kaikille välin $[a, b]$ jaoille p , joissa on n osaväliä, pätee

$$\sum_{k=1}^n (G_k - g_k) < K.$$

Tässä G_k ja g_k ovat funktion arvojen pienin yläraja ja suurin alaraja k :nnellä osavälillä. Todista, että tällöin f on integroitava välillä $[a, b]$.

VASTAUS:

9.2. Riemannin summa

373.

Laske seuraavat integraalit muodostamalla Riemannin summan raja-arvo:

$$\text{a) } \int_0^1 x^2 dx, \quad \text{b) } \int_a^b x^2 dx.$$

Ohjeeksi kaava $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

VASTAUS:

374.

Laske seuraava integraali muodostamalla Riemannin summan raja-arvo:

$$\int_0^1 e^x dx.$$

VASTAUS:

375.

Välille $[a, b]$ muodostetaan tasavälinen jako, jossa on n osaväliä, ja aidosti kasvavan funktion f integraalia approksimoidaan vastaavalla Riemannin summalla. Kuinka suureksi on n valittava, jotta approksimointivirheen itseisarvo olisi $< \varepsilon$?

VASTAUS: $n > (b - a)[f(b) - f(a)]/\varepsilon$.

376.

Olkon f rajoitettu funktio, joka on välillä $[-a, a]$ integroitava. Todista, että jos f on parillinen, niin $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$, ja jos f on pariton, niin $\int_{-a}^a f = 0$.

VASTAUS:

9.3. Määrätyn integraalin perusominaisuudet

377.

Osoita, että

$$\int_a^{\pi+a} \sin^2 x dx$$

ei riipu luvusta a .

VASTAUS: Arvo = $\pi/2$.

378.

Olkon funktio f integroitava suljetulla välillä I ja $a \in I$. Todista, että funktio

$$H(x) = \int_a^x f$$

on jatkuva välillä I .

VASTAUS:

379.

Laske

$$\text{a) } \frac{d}{dt} \int_{\pi}^t \sin^3 u du, \quad \text{b) } \frac{d}{dx} \int_x^{2\pi} (\sin^2 t - t^4 e^{-t}) dt, \quad \text{c) } \frac{d^2}{dx^2} \int_x^{5\pi} (\sin x)(e^x)(\ln x) dx \quad (x > 0).$$

VASTAUS: a) $\sin^3 t$; b) $-\sin^2 x + x^4 e^{-x}$; c) $-e^x[(\cos x + \sin x) \ln x + \sin x/x]$.

380.

Laske

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sinh(2x)} \sqrt{9+t^2} dt.$$

VASTAUS:

381.

Piirrä funktion

$$F(x) = \int_0^1 |t-x| dt$$

kuvaaja. Mikä on funktion pienin arvo?

VASTAUS: Pienin arvo $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

382.

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Mikä on funktion

$$g(x) = \int_a^b [f(t) - x]^2 dt$$

minimiarvo ja millä muuttujan arvolla tämä saadaan?

VASTAUS: Minimiarvo $\int_a^b f(t)^2 dt - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^b f(t) dt \right]^2$; saadaan arvolla $x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

383.

Laske $\int_0^{2\pi} f(x) dx$, kun $f'(x) = |\sin x|$ ja $f(0) = 1$.

VASTAUS: 6π .

384.

Tulkitse seuraava lauseke Riemannin summien raja-arvoksi, palauta se integraaliksi ja laske:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right].$$

VASTAUS: 64.

385.

Tulkitse seuraavat lausekkeet Riemannin summien raja-arvoiksi, palauta ne integraaleiksi ja laske:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi a}{n}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

VASTAUS: a) $(1 - \cos \pi a)/a$; b) $\ln 2$.

386.

Onko seuraava lasku oikein?

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^1 -\frac{1}{x} = -2.$$

VASTAUS: Ei.

387.

Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a) } \int_a^b (a+bx) dx, \quad \text{b) } \int_{-1}^1 (ax^2+bx+c) dx, \quad \text{c) } \int_2^7 \sqrt{x+2} dx.$$

$$\text{VASTAUS: a) } ab - a^2 + \frac{1}{2}(b^3 - a^2b); \quad \text{b) } \frac{2}{3}a + 2c; \quad \text{c) } \frac{38}{3}.$$