# 11. Määrätyn integraalin sovellutuksia

## 11.1. Pinta-ala ja tilavuus

# 459.

Laske sen rajoitetun alueen pinta-ala, jota reunustavat käyrät

$$\begin{aligned} &\text{a) } y^2 = 2x, \quad x^2 = 2y, \\ &\text{b) } y = 0, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2}), \\ &\text{c) } y = \frac{x^2}{4a}, \quad y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2} \quad (a \ne 0), \\ &\text{d) } y = \ln x, \quad y = (\ln x)^2. \end{aligned}$$

VASTAUS: a) $\frac{4}{3}$; b) $\ln 2$; c) $(2\pi - \frac{4}{3})a^2$; d) $3 - e$.

# 460.

Laske sen alueen pinta-ala, joka on ympyrän $r = a$ sisäpuolella, mutta Bernoulli'n lemniskaatan $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ ulkopuolella.

VASTAUS: $(2\pi/3 - 2 + \sqrt{3})a^2$.

# 461.

Laske sen alueen pinta-ala, joka on ympyrän $r = 6a\cos\varphi$ sisäpuolella, mutta kardioidin $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ ulkopuolella.

VASTAUS: $4\pi a^2$.

# 462.

Laske ympyröiden $r = a\cos\varphi$ ja $r = b\sin\varphi$ rajoittamien alueiden leikkauksen ala.

VASTAUS: $\frac{1}{8}[\pi a^2 + 2(b^2 - a^2)\,\overline{\text{arc}}\tan\frac{a}{b} - 2ab]$.

# 463.

$2a$-sivuisen neliön keskipisteestä piirille piirrettyjä säteitä jatketaan janalla, jonka pituus on $ka$. Jatkettujen säteiden loppupisteet muodostavat umpinaisen käyrän. Laske tämän rajoittaman alueen pinta-ala.

VASTAUS: $(4 + 8k\ln(\sqrt{2} + 1) + \pi k^2)a^2$.

# 464.

Tason ympyrärenkaassa on kiinteä säde $OAB$, missä $O$ on ympyrärenkaan keskipiste, $A$ sisemmän ja $B$ ulomman reunaympyrän kehällä. Säde $OP$ kiertää keskipisteen $O$ ympäri siten, että se alussa yhtyy säteeseen $OA$, lopussa säteeseen $OB$ ja sen pituus on kiertokulman ensimmäisen asteen polynomi. Missä suhteessa saatu käyrä ja jana $AB$ jakavat ympyrärenkaan pinta-alan?

VASTAUS: $(2a + b)/(a + 2b)$, missä $a$ on sisäsäde, $b$ ulkosäde.

# 465.

Laske asteroidin $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ reunustaman alueen pinta-ala.

VASTAUS: $\frac{3}{8}\pi ab$.

# 466.

Laske sykloidinkaaren $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, ja x-akselin reunustaman alueen pinta-ala.

VASTAUS: $3\pi a^2$.

# 467.

Laske tasokäyrän $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)(\mathbf{i} + t\,\mathbf{j})$ muodostaman silmukan pinta-ala.

VASTAUS: $\frac{8}{15}$.

# 468.

Laske lieriöiden $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$ ja $z^2 + x^2 = R^2$ yhteisen osan tilavuus.

VASTAUS:

# 469.

Laske sen kappaleen tilavuus, joka muodostuu seuraavan rajoitetun tasoalueen pyörähtäessä x-akselin ympäri:

a) käyrien $y = x^2$ ja $x = y^2$ reunustama alue,
b) $\{(x,y) \mid x \in ]0, \pi/4[,\ 0 < y < \tan x\}$,
c) asteroidin $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$ reunustama alue,
d) sykloidin kaaren $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, ja x-akselin reunustama alue,
e) kardioidin $r = a(1 + \cos\varphi)$ reunustama alue.

VASTAUS: a) $\frac{3\pi}{10}$; b) $\frac{\pi}{4}(4 - \pi)$; c) $\frac{32\pi}{105}ab^2$; d) $5\pi^2 a^3$; e) $\frac{8\pi}{3}a^3$.

# 470.

Akselin suhteen symmetrinen paraabelin segmentti, jonka kanta on $b$ ja korkeus $h$, pyörähtää kannan ympäri. Laske muodostuvan kappaleen, ns. *Cavalieri'n sitruunan* tilavuus.

VASTAUS: $\frac{8\pi}{15}bh^2$.

# 471.

Tasokuvio

a) $\{(x,y) \mid x \in [0, 2\pi],\ 0 \le y \le 1 - \cos x\}$,
b) $\{(x,y) \mid x \in [1, 3],\ 0 \le y \le (x - 1)(3 - x)\}$

pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

VASTAUS: a) $4\pi^3$; b) $\frac{16\pi}{3}$.

# 472.

Olkoot $a$, $b$ ja $c$ positiivisia vakioita. Laske tilavuus kappaleelle

$$\{(x,y,z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z^2 \le a^2 - bx - cy\}.$$

VASTAUS: $\frac{4a^5}{15bc}$.

# 473.

Kappaleen pohja on ympyrä, jonka säde on $R$. Jokainen kappaleen tasoleikkaus, joka on kohtisuorassa pohjaympyrän kiinteää halkaisijaa vastaan, on tasasivuinen kolmio. Laske kappaleen tilavuus. Hahmottele kuvio.

VASTAUS: $4R^3/\sqrt{3}$.

# 474.

Tynnyrin korkeus on $h$, pohjaympyröiden säteet $a$ ja keskikohdalta otetun poikkileikkausympyrän säde $b$. Laske tynnyrin tilavuus, kun sivulaudat kaartuvat paraabelin muotoisesti.

VASTAUS: $\dfrac{\pi h}{15}(3a^2+4ab+8b^2)$.

# 475.

Kappaleen vaakasuorat tasoleikkaukset ovat neliöitä, joiden kärjet ovat $R$-säteisen pallon pinnalla. Laske kappaleen tilavuus. Määräytyykö kappale yksikäsitteisesti eo. ehdoista?

VASTAUS: $\frac{8}{3}R^3$; ei.

# 476.

Jatkuvasti muuttuvan ympyrän keskipiste liikkuu täyden kierroksen pitkin ellipsiä $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, sen taso on kohtisuorassa x-akselia vastaan ja se kulkee aina x-akselilla olevan pisteen kautta. Määritä liikkuvaa ympyrää peittävän kappaleen tilavuus.

VASTAUS: $\frac{8\pi}{3}ab^2$.

# 477.

Suoran ympyrälieriön pohjan säde on $r$ ja korkeus $h$. Pohjan erään halkaisijan kautta asetetaan kaksi tasoa, jotka sivuavat toista pohjaympyrää. Laske lieriön ja tasojen rajoittaman kappaleen tilavuus.

VASTAUS: $(\pi-\frac{4}{3})hr^2$.

# 478.

Kahdella elliptisellä lieriöllä on yhteinen $r$-säteinen pohjaympyrä ja niiden toiset pohjaympyrät sivuavat toisiaan pisteessä, joka sijaitsee ensinmainitun pohjan keskipisteen kautta kulkevalla pohjatason normaalilla. Lieriöiden korkeus on $h$. Laske lieriöiden yhteisen osan tilavuus.

VASTAUS: $\frac{4}{3}hr^2$.

## 11.2. Funktion keskiarvo

# 479.

Laske funktion

$$f(x)=\frac{1}{2a}+\frac{a}{2x^2}$$

keskiarvo välillä $[a,b]$. Millä muuttujan arvolla $\xi$ funktion arvo on ko. keskiarvo?

VASTAUS: $\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$; $\xi=\sqrt{ab}$.

# 480.

Laske funktion

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

keskiarvo välillä $[1,4]$. Millä muuttujan arvolla $\xi$ funktion arvo on ko. keskiarvo?

VASTAUS: $\frac{20}{9}$; $\xi=(\frac{10+\sqrt{19}}{9})^2$.

# 481.

Laske virran $I(t)=I_0\sin(\omega t)$ ja jännitteen $E(t)=E_0\sin(\omega t-\varphi)$ tulon keskiarvo jakson pituisella välillä.

VASTAUS: $\frac{1}{2}E_0I_0\cos\varphi$.

# 482.

Laske funktioiden $I_1\sin(\omega t+\alpha_1)$ ja $I_2\sin(\omega t+\alpha_2)$ summan neliön keskiarvo jakson pituisella välillä.

VASTAUS: $\frac{1}{2}(I_1^2+I_2^2)+I_1I_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)$.

## 11.3. Kaarenpituus ja pyörähdyspinnan ala

# 483.

Laske seuraavien käyränkaarien pituudet:

$$\begin{aligned}&\text{a) } y=\sqrt{x},\quad x\in[0,1],\\&\text{b) } y=\ln x,\quad x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}],\\&\text{c) } y=\ln\cos x,\quad x\in[0,\tfrac{\pi}{4}],\\&\text{d) } y=\tfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x},\quad x\in[0,3].\end{aligned}$$

VASTAUS: a) $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$; b) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; c) $\ln(1+\sqrt{2})$; d) $2\sqrt{3}$.

# 484.

Laske pituus hyperbolisen spiraalin kaarelle $r=1/\varphi$, $\varphi\in[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$.

VASTAUS: $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

# 485.

Laske pituus logaritmisen spiraalin kaarelle $r=e^{\varphi}$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$.

VASTAUS: $\sqrt{2}(e^{\beta}-e^{\alpha})$.

# 486.

Laske asteroidin $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ koko pituus.

VASTAUS: $6a$.

## 487.

Laske sykloidin kaarenpituus: $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

VASTAUS: $8a$.

## 488.

Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt,$$

missä $a$ on ellipsin ison akselin puolikas ja $e$ eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

VASTAUS:

## 489.

Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

VASTAUS: $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

## 490.

Laske väliä $t \in [0, 1]$ vastaava kaarenpituus, kun käyrä on a) $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, b) $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}t\,\mathbf{k}$.

VASTAUS: a) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$; b) $\frac{5}{3}$.

## 491.

Johda kartion pinta-alan kaava pyörähdyspinnan alaa esittävästä integraalista.

VASTAUS:

## 492.

Laske sen pinnan ala, joka syntyy, kun seuraava kaari pyörähtää x-akselin ympäri:

$$\text{a) } y = x^3, \quad x \in [0, 3],$$
$$\text{b) } y = \sqrt{2px}, \quad x \in [0, a].$$

VASTAUS: a) $\frac{\pi}{27}(730\sqrt{730} - 1)$; b) $\frac{2\pi}{3}[(2a + p)\sqrt{2ap + p^2} - p^2]$.

## 493.

Ketjukäyrän $y = a\cosh\frac{x}{a}$, $|x| \le a$, pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy *katenoidiksi* kutsuttu pinta. Laske tämän ala. Hahmottele kuvio.

VASTAUS: $\pi(\sinh 2 + 2)a^2$.

## 494.

Asteroidi $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyspinnan ala.

VASTAUS: $\frac{12\pi}{5}a^2$.

## 495.

Sykloidin kaari $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyspinnan ala.

VASTAUS: $\frac{64\pi}{3}a^2$.

# 496.

Laske ellipsoidin $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/b^2=1$ pinta-ala.

VASTAUS:

# 497.

Laske ellipsin pyörähtäessä a) isoakselin, b) pikkuakselin ympäri muodostuvan ellipsoidin ala. Johda kummastakin pallon pinta-ala muodostamalla sopiva raja-arvo.

VASTAUS: a) $2\pi ab\left(\sqrt{1-e^2}+\frac{\overline{\arcsin} e}{e}\right)$; b) $2\pi a^2\left(1+\frac{1-e^2}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right)$.

## 11.4. Käyräteoriaa

# 498.

Määritä käyrän $\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}+t^3\,\mathbf{k}$ kaarevuus ja kierevyys käyräparametrin $t$ funktiona.

VASTAUS: $1/R=2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}(1+4t^2+9t^4)^{-3/2}$, $\quad 1/T=3(1+9t^2+9t^4)^{-1}$.

# 499.

Määritä ruuviviivan $\mathbf{r}(t)=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+bt\,\mathbf{k}$ jokaisessa pisteessä kolmikanta $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$, kaarevuus, kierevyys ja kaarevuuskeskipiste.

VASTAUS: $\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j}+b\,\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{n}=-\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{b}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,\mathbf{i}-b\cos t\,\mathbf{j}+a\,\mathbf{k}$; $\frac{1}{R}=\frac{a}{a^2+b^2}$; $\quad \frac{1}{T}=\frac{b}{a^2+b^2}$; $\quad \left(-\frac{b^2}{a}\cos t,-\frac{b^2}{a}\sin t,bt\right)$.

# 500.

Etsi käyrälle

$$\mathbf{r}(t)=e^t\,\mathbf{i}+e^{-t}\,\mathbf{j}+\sqrt{2}t\,\mathbf{k}$$

parametriesitys, jossa parametrina on kaarenpituus mitattuna jostakin kiinteästä pisteestä. Laske kaarenpituuden suhteen derivoimalla käyrän tangenttivektori, päänormaalivektori ja sivunormaalivektori sekä näiden avulla kaarevuus ja kierevyys. Laske erityisesti kaarevuus ja kierevyys arvoa $t=2$ vastaavassa pisteessä.

VASTAUS:

# 501.

Laske sykloidin $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$ kaarevuus parametrin $t$ funktiona.

VASTAUS: $\frac{1}{4a|\sin(t/2)|}$.

# 502.

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ vakiovektoreita. Laske käyrän

$$\mathbf{r}(t)=t^2\,\mathbf{a}+t\,\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

kaarevuus ja kierevyys. Päättele, että kyseessä on tasokäyrä. Missä tasossa se sijaitsee?

VASTAUS:

# 503.

Määritä kolmikanta $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ ja oskuloiva taso parabolisten lieriöiden $x^2 = 2z$ ja $y^2 = 2z$ leikkauskäyrän jokaisessa pisteessä.

VASTAUS:

# 504.

Määritä oskuloiva taso parabolisten lieriöiden $x^2 = 2az$ ja $y^2 = 2bz$ leikkauskäyrän jokaisessa pisteessä.

VASTAUS: $\sqrt{b}x - \sqrt{a}y = 0$ pisteissä $(t, \sqrt{b/a}t, t^2/(2a))$; $\sqrt{b}x + \sqrt{a}y = 0$ pisteissä $(t, -\sqrt{b/a}t, t^2/(2a))$.

# 505.

Laske käyrän

$$\mathbf{r}(t) = (2t+3)\,\mathbf{i} + (3t-1)\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$$

kierevyys ja päättele tästä, että kyseessä on tasokäyrä. Missä tasossa käyrä sijaitsee?

VASTAUS: 0; $3x - 2y = 11$.

# 506.

Partikkelin ratakäyrä olkoon ellipsi $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$, missä $t$ on aika. Laske partikkelin nopeus- ja kiihtyvyysvektorit. Hajota kiihtyvyysvektori rata- ja normaalikomponentteihin. Määritä ratanopeuden suurin ja pienin arvo.

VASTAUS:

# 507.

Kappaleen ratakäyrä avaruudessa on

$$\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\,\mathbf{i} + (t^3-3t^2)\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k},$$

missä $t$ on aika. Laske partikkelin nopeusvektori, ratanopeus, kiihtyvyysvektori, ratakiihtyvyys ja normaalikiihtyvyys hetkellä $t = 1$. Mikä on tällöin radan kaarevuussäde?

VASTAUS: $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $v = \sqrt{38}$; $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$; ratakiihtyvyys $4/\sqrt{38}$, normaalikiihtyvyys $2\sqrt{17}/\sqrt{19}$; $R = 19\sqrt{19}/\sqrt{17}$.

# 508.

Kappale kulkee ellipsirataa, jonka toisessa polttopisteessä on origo. Nopeus määräytyy siten, että napakulma kasvaa vakionopeudella $\omega$. Laske kappaleen nopeusvektori ja ratanopeus ajan funktioina. Mikä on ratanopeus, jos ellipsiradan eksentrisyys on $= 0$, ts. kyseessä on ympyrärata? Tiedoksi ellipsin napakoordinaattiyhtälö

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

VASTAUS:

# 509.

Maapallon pinnalla kulkeva kappale lähtee liikkeelle päiväntasaajan ja nollameridiaanin leikkauspisteestä ja etenee siten, että sen leveysaste ja pituusaste kasvavat vakionopeudella $\omega$. Laske kappaleen ratanopeus (= nopeusvektorin itseisarvo) ajan funktiona. Piirrä tämän kuvaaja. (Valitse kuvaajassa $\omega = 1$.) Minne kappale päätyy?

VASTAUS:

# 510.

Tasokäyrä olkoon annettu muodossa $y = y(x)$. Johda käyrän kaarevuudelle lauseke

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''(x)|}{[1+y'(x)^2]^{3/2}}.$$

VASTAUS:

# 511.

Tasokäyrä olkoon annettu napakoordinaattimuodossa $r = r(\varphi)$. Johda kaarevuudelle lauseke

$$\frac{1}{R} = \frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

VASTAUS:

# 512.

Määritä kaarevuuden suurin arvo käyrällä a) $y = x^3$, b) $y^2 = 2px$, c) $y = \ln x$. Määritä vastaavan kaarevuusympyrän keskipiste ja säde. Piirrä kuvio.

VASTAUS: a) Maksimi $\dfrac{5\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{2}}$, keskipiste $(\pm\dfrac{2}{5\sqrt[4]{45}}, \pm\dfrac{10}{3\sqrt[4]{1125}})$; b) maksimi $\dfrac{1}{p}$, keskipiste $(p,0)$; c) maksimi $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, keskipiste $(2\sqrt{2}, -\frac{1}{2}(\ln 2+3))$.

# 513.

Määritä ellipsin akseleiden päätepisteisiin asetetut kaarevuusympyrät. Piirrä kuvio.

VASTAUS:

# 514.

Lausu ellipsin $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kaarevuus eksentrisen anomalian funktiona. Määritä kaarevuuden ääriarvot.

VASTAUS: $1/R = ab[(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2]^{-3/2}$; maksimi $a/b^2$, minimi $b/a^2$.

# 515.

Määritä kaarevuus käyrälle

$$y = \int_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt.$$

VASTAUS: $|1+\ln(1+x)|/[1+(1+x)^2(\ln(1+x))^2]^{3/2}$.

# 516.

Määritä $a$ siten, että funktion

$$y = \frac{x-a}{x+a}$$

kuvaajan kaarevuussäde saa ääriarvon pisteessä $(0,-1)$. Millainen ääriarvo on kyseessä?

VASTAUS: $a = \pm 2$; absoluuttinen minimi.

# 517.

Laske kardioidin $r = a(1+\cos\varphi)$ kaarevuus napakulman $\varphi$ funktiona.

VASTAUS: $\dfrac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$.

# 518.

Tutki logaritmisen spiraalin $r = Ce^{k\varphi}$ kaarevuutta. Osoita, että käyrän piste, kaarevuuskeskipiste ja origo muodostavat suorakulmaisen kolmion. Piirrä kuvio.

VASTAUS: $1/R = 1/(Ce^{k\varphi}\sqrt{1+k^2})$.

# 519.

Yhtälö $x^y = y^x$ määrittää pisteen $(2,4)$ ympäristössä funktion $y = f(x)$. Laske $f'(2)$ ja $f''(2)$. Laske funktion kuvaajan kaarevuus em. pisteessä.

VASTAUS: $f'(2) = \dfrac{4(\ln 2-1)}{2\ln 2-1}$, $f''(2) = \dfrac{12\ln 2-4(\ln 2)^2-6}{(2\ln 2-1)^3}$, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{12\ln 2-4(\ln 2)^2-6}{[20(\ln 2)^2-36\ln 2+17]^{3/2}}$.

# 520.

Määritä käyrän $y^3 - xy^2 + x^2y = 1$ kaarevuus pisteessä, jossa $x = 1$. Piirrä kuvio.

VASTAUS: $\frac{12}{5\sqrt{5}}$.