

12. Lisää määrätystä integraalista

12.1. Integraalin arvioimisesta

521.

Osoita:

$$1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{21}} dx < \frac{22}{21}.$$

VASTAUS:

522.

Osoita:

$$0 < \int_{50}^{100} \frac{x^3}{x^6 + 8x + 9} dx < 15 \cdot 10^{-5}.$$

VASTAUS:

523.

Osoita:

$$\frac{2}{\sqrt{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2.$$

VASTAUS:

524.

Olkoon $k > 0$. Osoita:

$$\int_0^k \frac{e^x}{1+x} dx > k.$$

VASTAUS:

525.

Olkoon $a > e$. Osoita:

$$\int_e^a \frac{x}{e \ln x} dx > a - e.$$

VASTAUS:

526.

Osoita, että

$$\int_{100}^{300} \frac{x^5}{x^6 + x + 1} dx = \ln 3 - \delta,$$

missä $10^{-12} < \delta < 10^{-10}$.

VASTAUS:

527.

Funktiosta f oletetaan, että $f(0) = 1$, sen derivaatta f' on jatkuva ja $1 + x \leq f'(x) \leq e^x$ välillä $[-1, 0]$. Mitä arvoja $f(-1)$ voi saada?

VASTAUS: $\frac{1}{e} \leq f(-1) \leq \frac{1}{2}$.

528.

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja olkoon $\int_a^b f(x)h(x) dx = 0$, olipa h mikä tahansa integroitava funktio. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$.

VASTAUS:

12.2. Määrätyn integraalin väliarvolause

529.

Määritä integraalilaskun väliarvolauseessa esiintyvä ξ , kun kyseessä on integraali

$$\text{a) } \int_a^b (\alpha x + \beta) dx, \quad \text{b) } \int_a^b x^2 dx.$$

VASTAUS: a) $\xi = \frac{1}{2}(a+b)$; b) merkitään $c = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)}$; jos $a \geq 0$, $b \geq -\frac{a}{2}$ tai $a < 0$, $b \geq -2a$, niin $\xi = c$; jos $a > 0$, $b \leq -2a$ tai $a \leq 0$, $b \leq -\frac{a}{2}$, niin $\xi = -c$; jos $-2 < \frac{b}{a} < -\frac{1}{2}$, niin $\xi = \pm c$.

530.

Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_4^{x^2} e^{t^2} dt.$$

VASTAUS: $4e^{16}$.

531.

Olkoon funktio f jatkuva ja funktio g määritelty seuraavasti:

$$g(x) = \begin{cases} x/h^2, & \text{kun } x \in [0, h], \\ (2h-x)/h^2, & \text{kun } x \in [h, 2h], \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita (yleistettyä) integraalilaskun väliarvolausetta käyttäen, että

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x)g(x) dx = f(0).$$

VASTAUS:

12.3. Epäoleelliset integraalit

532.

Laske arvo tai osoita hajaantuminen seuraaville integraaleille:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q} \quad (p^2 < 4q), & \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}, & \text{c) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}, \\ \text{d) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}, & \text{e) } \int_1^{\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+x} dx, & \text{f) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \\ \text{g) } \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0), & \text{h) } \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0), & \\ \text{i) } \int_0^1 \frac{x^5}{(1-x^2)^{3/2}} dx, & \text{j) } \int_0^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}} dx, & \text{k) } \int_0^6 \frac{2x}{x^2-4} dx, \\ \text{l) } \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} dx \quad (a \neq 0), & \text{m) } \int_0^{\pi/2} \tan x dx, & \text{n) } \int_0^1 \ln x dx. \end{array}$$

VASTAUS: a) $2\pi/\sqrt{4q-p^2}$; b) $\pi/4$; c) $2\sqrt{3}\pi/9$; d) $\pi/4$; e) $\pi/2 + \ln 2$; f) $2\ln(\sqrt{2}+1)$; g) $a/(a^2+b^2)$; h) $b/(a^2+b^2)$; i) hajaantuu; j) $9\sqrt[3]{4}$; k) hajaantuu; l) $3\pi a^2/8$; m) hajaantuu; n) -1 .

533.

Johda palautuskaava integraalille

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ja laske integraali sen avulla.

VASTAUS: $I_0 = 1$, $I_n = nI_{n-1}$, kun $n \in \mathbb{N}$; $I_n = n!$.

534.

Määritä a ja b siten, että integraali

$$\int_1^{\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right] dx$$

suppenee ja on arvoltaan $= 1$.

VASTAUS: $a = b = 2(e-1)$.

535.

Tutki, millä arvoilla $k \in \mathbb{R}$ seuraavat integraalit suppenevat:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1+x+x^2}{x^k} dx, \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{kx^2+1}, \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx.$$

VASTAUS: a) $k < 1$; b) $k > 0$; c) $k > -1$.

536.

Millä arvoilla $k \in \mathbb{R}$ integraali

$$\int_0^1 \frac{x^{k-1} + x^{-k}}{1+x} dx$$

a) ei ole epäoleellinen, b) on epäoleellinen ja suppenee?

VASTAUS: a) Ei millään; b) $0 < k < 1$.

537.

Laske seuraavan epäoleellisen integraalin arvo tai osoita sen hajaantuminen:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

VASTAUS:

538.

Laske

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$$

VASTAUS: $\frac{\pi}{2|ab|}$.

539.

Sievennä funktion

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{x \sin t}{\sqrt{1 + 2x \cos t + x^2}} dt$$

lauseke ja piirrä kuvaaja.

VASTAUS: $f(x) = -2$, kun $x \leq -1$; $f(x) = 2x$, kun $-1 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$, kun $x \geq 1$.

540.

Osoita, että on olemassa vakio $M > 0$ siten, että kaikilla $\varepsilon \in]0, 1[$ pätee

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx < M.$$

VASTAUS:

541.

Todista:

$$\int_a^{\infty} f \text{ suppenee} \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} f = 0.$$

VASTAUS:

542.

Todista:

- a) $\int_a^b |f| \text{ suppenee} \implies \int_a^b f \text{ suppenee},$
b) $\int_{-\infty}^{\infty} |f| \text{ suppenee} \implies \int_{-\infty}^{\infty} f \text{ suppenee}.$

VASTAUS:

543.

Olkoon funktio f jatkuva, kun $x \geq 1$, ja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x} = -2.$$

Osoita, että integraali $\int_1^\infty e^{f(x)} dx$ suppenee.

VASTAUS:

544.

Arvoilla $x > 0$ määritellään *gammafunktio* integraalilla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Päättele, että integraali suppenee, jos $x > 0$. Suppeneeko integraali, jos $x \leq 0$?

VASTAUS: Ei suppene, jos $x \leq 0$.

545.

Piirrä gammafunktion kuvaaja jonkin tietokoneohjelman avulla. Tarkastele erikseen positiivisia ja negatiivisia muuttujan arvoja. Tiedätkö, miten gammafunktio on määritelty negatiivisilla muuttujan arvoilla?

VASTAUS:

546.

Laske käyrän $y = xe^{-x^2/2}$ ja sen asymptootin väliin jäävän rajoittamattoman tasokuvion ala.

VASTAUS: 2.

547.

xz-tason käyrä $z = \exp(-x^2)$ pyörähtää z-akselin ympäri, jolloin syntyy xy-tason yläpuolella sijaitseva (äärettömyyteen joka suunnassa ulottuva) pinta. Laske tämän pinnan ja xy-tason väliin jäävän alueen tilavuus, mikäli se on äärellinen.

VASTAUS:

548.

Osoita, että avaruuskäyrän $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $0 \leq t < \infty$, pituus on äärellinen ja määritä se.

VASTAUS: $\sqrt{3}$.

549.

Käyrä $y = e^{-x}$, $0 \leq x < \infty$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän (äärettömyyteen ulottuvan) pyörähdyspinnan ala.

VASTAUS: $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

550.

Käyrä $y = 1/x$, $1 \leq x < \infty$, pyörähtää x-akselin ympäri, jolloin syntyy äärettömyyteen ulottuva suppilomainen astia. Laske tämän tilavuus. Astian halkaisijataso on levy $\{(x, y) \mid |y| \leq 1/x, x \geq 1\}$. Mikä on tämän pinta-ala? Jos astia täytetään maalilla, tuleeko halkaisijataso kokonaisuudessaan peitetyksi maalilla?

VASTAUS:

551.

Määritä kaarenpituus napakoordinaattikäyrälle $r = e^{-\varphi}$, $\varphi \in [0, \infty[$. Laske käyrän kaarevuus parametrin φ funktiona. Mikä on kaarevuussäteen raja-arvo, kun $\varphi \rightarrow \infty$? Piirrä käyrä.

VASTAUS: