13. Taylorin polynomi; funktioiden approksimoinnista

13.1. Taylorin polynomi

552.

Muodosta funktion $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 8$ kaikki Taylorin polynomit $T_k(x, -2)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (jolloin siis potenssien kantalukuna on $x + 2$). Kehitä ne myös siten, että kantalukuna on x. Piirrä polynomien kuvaajat ja vertaa niitä funktion kuvaajaan.

VASTAUS:

553.

Etsi toisen asteen Taylorin polynomi ja vastaava jäännöstermi integraali- ja Lagrangen muodossa, kun funktiona on f ja kehityskeskuksena a:

$$\text{a) } f(x) = e^x, \quad a = -1, \qquad \text{b) } f(x) = \overline{\text{arc}}\sin x, \quad a = \frac{1}{2}.$$

VASTAUS: a) $T_2 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1)$, $R_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^t (x-t)^2\, dt = \frac{1}{6} e^{\xi}(x+1)^3$; b) $T_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})^2$, $R_3 = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{x} \frac{1+2t^2}{(1-t^2)^{5/2}}(x-t)^2\, dt = \frac{1+2\xi^2}{6(1-\xi^2)^{5/2}}(x - \frac{1}{2})^3$.

554.

Muodosta funktion $\overline{\text{arc}}\sin x$ astetta 10 oleva Taylorin polynomi a) pisteessä $x = 0$, b) pisteessä $x = \frac{1}{2}$.

VASTAUS:

555.

Laske funktion $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ Taylorin polynomi $T_3(x, 2)$ ja piirrä funktion, Taylorin polynomin sekä vastaavan jäännöstermin kuvaajat.

VASTAUS: $T_3(x, 2) = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3$.

556.

Muodosta viidennen asteen Taylorin polynomi kehityskeskuksena origo funktiolle

$$f(x) = \frac{x^2 - \overline{\text{arc}}\tan x^2}{x^6}.$$

VASTAUS:

557.

Olkoon f astetta 4 oleva polynomi, $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{(4)}(2) = 24$. Laske $f(-1)$, $f'(0)$ ja $f''(1)$ mahdollisimman yksinkertaisesti.

VASTAUS: $f(-1) = 143$, $f'(0) = -60$, $f''(1) = 26$.

558.

Osoita, että parillisen (vastaavasti parittoman) funktion Maclaurinin polynomi sisältää vain muuttujan parillisia (parittomia) potensseja.

VASTAUS: Derivoi yhtälöä $f(x)=f(-x)$ (vastaavasti $f(x)=-f(-x)$).

559.

Todista, että $\ln(1-2x)<T_3(x,0)$, kun T_3 tarkoittaa funktion $\ln(1-2x)$ Taylorin polynomia ja tarkastellaan arvoja $x<\frac{1}{2}$, $x\neq 0$.

VASTAUS: $R_4(x,0)=-4\left(\dfrac{x}{1-2\xi}\right)^4$.

560.

Todista:

$$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\geq\cos x\geq 1-\frac{1}{2}x^2,\quad \text{kun } x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Pitääkö epäyhtälöketju paikkansa välin ulkopuolella?

VASTAUS: $R_4(x,0)=\frac{\cos\xi}{24}x^4$, $R_6(x,0)=-\frac{\cos\eta}{720}x^6$; epäyhtälöketju on voimassa kaikkialla.

561.

Muodosta geometrisen summan kaavaa käyttäen funktiolle $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ Maclaurinin polynomi $T_n(x,0)$ indeksin n funktiona. Laske tämän avulla $f^{(n)}(0)$.

VASTAUS: $T_{2m}(x,0)=T_{2m+1}(x,0)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^m x^{2m}$; $f^{(2m)}(0)=(-1)^m(2m)!$, $f^{(2m+1)}(0)=0$; $m=0,1,2,\ldots$.

562.

Muodosta funktion $\ln(1+x)$ Maclaurinin polynomi $T_n(x,0)$ tarkastelemalla ensin funktion derivaattaa ja käyttämällä geometrisen summan kaavaa.

VASTAUS: $T_n(x,0)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

563.

Olkoon $f(x)=x^3\ln(2+x^2)$. Määritä $f^{(87)}(0)$.

VASTAUS: $-\frac{87!}{2^{43}\cdot 21}$.

564.

Olkoon funktion f toinen derivaatta f'' jatkuva välillä $[a,a+h]$, jolloin

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a+\vartheta h)h^2,$$

missä $\vartheta\in[0,1]$. Osoita, että $\vartheta\to\frac{1}{3}$, kun $h\to 0$, jos lisäksi f''' jatkuva ja $f'''(a)\neq 0$.

VASTAUS:

13.2. Taylorin polynomin sovellutuksia

565.

Millä tarkkuudella Taylorin polynomi $T_2(x,0)$ antaa funktion $f(x)$ arvot välillä $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, kun $f(x)$ on

a) $\sqrt{1+x}$, b) $\cos x$, c) $\tan x$, d) $e^{\sin x}$.

VASTAUS: a) $\frac{\sqrt{2}}{32} < 0.045$; b) $\frac{1}{384} < 0.0027$; c) $\frac{1+2\sin^2(1/2)}{24\cos^4(1/2)} < 0.11$; d) $\frac{1}{96}e^{\sin(1/2)}\sin 1\,(3+\sin(1/2)) < 0.050$.

566.

Muodosta funktion $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ Maclaurinin polynomi $T_3(x,0)$ ja arvioi erotuksen $f(x) - T_3(x,0)$ itseisarvoa. Mikä on tämän yläraja, kun $|x| < 4$?

VASTAUS: $T_3(x,0) = 2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2 + \frac{5}{20736}x^3$; $|R_4(x,0)| < \frac{10}{243}\sqrt[3]{4} < 0.066$.

567.

Tutki, millä tarkkuudella funktion $\sin x$ arvot voidaan laskea Maclaurinin polynomin $T_5(x,0)$ avulla a) välillä $[-1,1]$, b) välillä $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

VASTAUS:

568.

Tutki, millä tarkkuudella Maclaurinin polynomi $x - \frac{1}{6}x^3$ antaa sinifunktion arvot kulmille, jotka ovat välillä $[0°, 10°]$.

VASTAUS: $T_3(x,0) = T_4(x,0)$; $|R_5(x,0)| < \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < 1.4 \cdot 10^{-6}$.

569.

Montako termiä funktion $\sqrt{x+1}$ Maclaurinin polynomiin on otettava, jotta välillä $[\frac{1}{2}, 2]$ olevien lukujen neliöjuuret saataisiin lasketuksi viiden desimaalin tarkkuudella?

VASTAUS:

570.

Muodosta funktiolle $\cos x$ sellainen Maclaurinin polynomi, joka approksimoi funktiota välillä $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ tarkkuudella 10^{-4}.

VASTAUS: $T_6(x,0)$.

571.

Ilmoita jokin väli, jolla $T_2(x,0)$ approksimoi funktiota $\cos x$ tarkkuudella 10^{-5}.

VASTAUS: $[-\sqrt[4]{0.00024}, \sqrt[4]{0.00024}] \supset [-0.124, 0.124] \supset [-7.1°, 7.1°]$.

572.

Millä tarkkuudella on

$$\frac{1}{x^4}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right] \approx \frac{1}{2},$$

kun $|x| \leq 0.15$?

VASTAUS: $0.15^2/4 < 0.0057$.

573.

Laske likiarvo luvulle $1/\sqrt[4]{e}$ approksimaatiokaavasta

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Arvioi virheen suuruutta ja merkkiä.

VASTAUS: $25/32 \approx 0.781$; $-0.0027 < R_3 < 0$.

574.

Laske sopivaa Taylorin polynomia sekä neljää peruslaskutoimitusta käyttäen likiarvot seuraaville luvuille: a) $1/e$ tarkkuudella 10^{-4}; b) $\sin 1^\circ$ tarkkuudella 10^{-5}; c) $\cos 10^\circ$ tarkkuudella 10^{-3}.

VASTAUS: a) $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\frac{1}{5040} \approx 0.36786$; b) $\pi/180 \approx 0.017453$; c) $1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{18})^2 \approx 0.9848$.

575.

Määritä funktion $\sinh x - \sin x$ ääriarvot.

VASTAUS: Ei ole.

576.

Tutki, onko funktiolla

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + \frac{x^2}{2}$$

ääriarvoa kohdassa $x = 0$.

VASTAUS: Kyseessä on minimikohta.

577.

Todista, että arvoilla $x \neq 0$ pätee $\cos x - \cosh x + x^2 < 0$.

VASTAUS:

578.

Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

muodostamalla vastaava Maclaurinin polynomi.

VASTAUS:

579.

Käyrillä $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sanotaan olevan pisteessä x (vähintään) *kertalukua n oleva kosketus*, jos funktioiden arvot ja niiden derivaattojen arvot kertalukuun n saakka yhtyvät tässä pisteessä. Määritä käyrälle $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{a}$ ($a > 0$) kaarevuusympyrä pisteessä (a, a) ja osoita, että kosketuksen kertaluku on 3 (mutta ei suurempi).

VASTAUS: $(x-3a)^2 + (y-3a)^2 = 8a^2$.

580.

Käyrillä $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sanotaan olevan pisteessä x (vähintään) *kertalukua n oleva kosketus*, jos funktioiden arvot ja niiden derivaattojen arvot kertalukuun n saakka yhtyvät tässä pisteessä. Määritä seuraavista parvista se käyrä, jolla on mahdollisimman korkean kertaluvun kosketus käyrän $y = e^x$ kanssa kohdassa $x = 0$:

a) kaikki ympyrät,
b) paraabelit, joiden akselit ovat y-akselin suuntaiset,
c) paraabelit, joiden akselit ovat x-akselin suuntaiset,
d) kaikki paraabelit,
e) kaikki toisen asteen käyrät.

Mikä on kosketuksen kertaluku?

VASTAUS: a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$, kertaluku 2; b) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, kertaluku 2; c) $x = -\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{3}{2}$, kertaluku 2; d) $4x^2 + y^2 + 4xy + 14x - 20y + 19 = 0$, kertaluku 3; e) $2x^2 - y^2 + 8xy + 10x - 16y + 17 = 0$, kertaluku 4.

581.

Käyrillä $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sanotaan olevan pisteessä x (vähintään) *kertalukua n oleva kosketus*, jos funktioiden arvot ja niiden derivaattojen arvot kertalukuun n saakka yhtyvät tässä pisteessä. Osoita, että niiden paraabelien polttopisteet, joilla on annetussa pisteessä toisen kertaluvun kosketus annetun käyrän kanssa, sijaitsevat ympyrällä, joka sivuaa käyrää annetussa pisteessä ja jonka säde on neljännes kyseiseen pisteeseen liittyvästä käyrän kaarevuussäteestä.

VASTAUS:

13.3. Polynomiapproksimaatioista

582.

Eksponenttifunktiota e^x approksimoidaan välillä $[-1, 1]$ ensimmäisen asteen polynomilla $ax + b$. Määritä kertoimet a ja b siten, että saadaan paras tasainen approksimaatio, ts. approksimaatiovirheen maksimi on mahdollisimman pieni.

VASTAUS:

13.4. Lagrangen interpolaatio

583.

Laske funktiolle $f(x) = 1 + x - x^2$ tasaväliseen pisteistöön välillä $[-1, 2]$ liittyvä a) ensimmäisen, b) toisen, c) kolmannen asteen interpolaatiopolynomi. Laske myös vastaavat virhetermit.

VASTAUS:

584.

Funktiota $f(x) = \sin \pi x$ interpoloidaan välillä $[0, 1]$ tasavälisessä pisteistössä astetta n olevalla polynomilla. Arvioi virhetermiä ja tutki, miten tämä käyttäytyy, kun n kasvaa.

VASTAUS:

13.5. Numeerisesta integroinnista

585.

Tarkastele luvun $\ln 2$ laskemista integraalin $\int_1^2 dx/x$ avulla: Laske integraali numeerisesti a) Riemannin summana laskemalla funktion arvot osavälien alkupisteissä, b) Riemannin summana laskemalla funktion arvot osavälien keskipisteissä, c) puolisuunikassäännöllä, d) Simpsonin säännöllä. Jaa integroimisväli neljään, kahdeksaan ja kuuteentoista osaväliin. Vertaa tuloksia.

VASTAUS:

586.

Laske edellisen tehtävän numeerisen integroinnin virhetermit puolisuunnikassäännön ja Simpsonin säännön tapauksessa ja vertaa niitä todelliseen virheeseen.

VASTAUS:

587.

Muodosta integraali, joka esittää ellipsin $4x^2 + 9y^2 = 36$ kaarenpituutta. Laske tämä numeerisesti. (Integrointi alkeisfunktioiden avulla ei onnistu.)

VASTAUS:

588.

Muodosta integraali, joka esittää ellipsin kehän pituutta eksentrisyyden funktiona, kun ison akselin puolikas on vakio $a = 1$. Piirrä kuvaaja, joka osoittaa, miten kehän pituus riippuu eksentrisyydestä. Mitkä ovat funktion tarkat arvot tarkasteluvälin päätepisteissä?

VASTAUS:

589.

Muunna epäoleellinen integraali (jota ei voida integroida alkeisfunktioiden avulla)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

sijoituksella $t = x/(1+x)$ rajoitetun välin yli otetuksi integraaliksi ja laske se numeerisesti jollakin tietokoneohjelmalla. Sijoituksen jälkeinen integraali on myös epäoleellinen, mutta tästä aiheutuvat ongelmat voidaan väistää poistamalla integroimisvälistä (todella) pieni osa singulariteetin ympäriltä. Vertaa tulosta tarkkaan arvoon $\sqrt{\pi}/2$.

VASTAUS: