1. Lukujonot ja vakiotermiset sarjat

1.1. Lukujono

1.

Todista, että lukujono $\langle a_k \rangle$ suppenee ja sen raja-arvo on ≤ 2, kun jono määritellään rekursiivisesti

$$a_0 = 0, \qquad a_{k+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Esitä yhtälö, josta raja-arvo voidaan ratkaista.

VASTAUS: $a^4 - 4a^2 - a + 4 = 0$; raja-arvo $a = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{79 - \sqrt{2241}} + \sqrt[3]{79 + \sqrt{2241}}) \approx 1.831177207208$.

2.

Lukujono $\langle a_k \rangle$ määritellään rekursiivisesti

$$a_1 = 1, \qquad a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + a_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Määritä $\lim_k a_k$.

VASTAUS: 0.

3.

Olkoon

$$f_k(x) = \frac{x^k}{1 + x^{2k}}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Määritä $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Piirrä funktioiden f_k kuvaajia. Millainen on raja-arvofunktion kuvaaja?

VASTAUS:

4.

Tutki, suppenevatko seuraavat kompleksiset lukujonot $\langle z_k \rangle$:

$$\text{a) } z_k = \frac{i^k}{k}, \quad \text{b) } z_k = \frac{ki^k}{k+1}, \quad \text{c) } z_k = \frac{(1+i)^k}{k}.$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) ei suppene; c) ei suppene.

5.

Tutki, suppenevatko seuraavat kompleksitason lukujonot $\langle z_k \rangle$:

$$\text{a) } z_k = \frac{i^k}{\sqrt[k]{k}}, \quad \text{b) } z_k = \frac{\pi}{2} + \frac{e^{ik\pi/4}}{k\pi}, \quad \text{c) } z_k = \frac{(1+i)^k}{k^2}.$$

Onko jonoilla kasautumispisteitä? Piirrä jonojen pisteitä kompleksitasoon.

VASTAUS: a) Ei suppene, kasautumispisteet ± 1, $\pm i$; b) suppenee, raja-arvo $\pi/2$; c) ei suppene, ei kasautumispisteitä.

6.

Olkoon s_k yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen 2^k-kulmion sivun pituus. Johda rekursiokaava, jossa s_{k+1} lausutaan edellisen luvun s_k avulla. Mikä on sopiva alkuarvo täten saatavalle rekursiivisesti määritellylle jonolle?

VASTAUS: $s_{k+1} = s_k / \sqrt{2+\sqrt{4-s_k^2}}$; $s_2 = \sqrt{2}$.

7.

Muodosta edellisen tehtävän jonon avulla lukujono $\langle p_k \rangle$, missä jonon luvut esittävät yksikköympyrän sisään piirretyn 2^k-kulmion piiriä. Laske tämän jonon termejä ja yritä saada näiden avulla niin tarkka approksimaatio luvulle π kuin mahdollista. Kuinka monta oikeata desimaalia saadaan?

VASTAUS:

8.

Lukujono muodostetaan rekursiokaavalla $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$, missä $x_0 = 0$. Parametrille a pätee $0 < a < 2$. Tutki kokeellisesti, miten jono käyttäytyy suurilla indeksin n arvoilla: laske 100 – 200 jonon lukua ja tulosta sen jälkeen näkyviin 10 – 20 seuraavaa lukua. Tarkastele erityisesti parametriarvoja $a = 0.5,\ 0.8,\ 1,\ 1.3,\ 1.39,\ 1.6$.

VASTAUS:

9.

Onko edellisen tehtävän jonolla raja-arvoa? Lausu raja-arvo parametrin a funktiona ja piirrä funktion kuvaaja. Mitä mahdetaan tarkoittaa käsitteillä *yläraja-arvo* ja *alaraja-arvo* ($\limsup$, $\liminf$, *limes superior*, *limes inferior*)? Entä lukujonon *kasautumispisteellä*?

VASTAUS:

1.2. Vakioterminen sarja

10.

Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

osasummia pienillä indeksin arvoilla ja arvaa näiden perusteella osasumman s_n lauseke. Todista arvauksesi. Osoita, että sarja suppenee ja määritä sen summa.

VASTAUS:

11.

Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

osasummia pienillä indeksin arvoilla ja arvaa näiden perusteella osasumman s_n lauseke. Todista arvauksesi. Osoita, että sarja suppenee ja määritä sen summa.

VASTAUS: $s_n = n/(3n+1)$; summa $= \frac{1}{3}$.

12.

Laske sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ osasummia, ja tutki, miten lähelle sarjan summaa päästään. Tarkka arvo on $\pi^2/6$. Tutki samalla tavoin sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4},$$

jonka summa on $\pi^4/96$.

VASTAUS:

13.

Todista, että suppenevan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ termien joukko $\{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ on rajoitettu.

VASTAUS:

14.

a) Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneva sarja. Todista, että jokaisella $p \in \mathbb{N}$ myös sarja $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ suppenee. b) Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuva sarja. Todista, että jokaisella $p \in \mathbb{N}$ myös sarja $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

VASTAUS:

15.

a) Todista, että jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu, niin $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ hajaantuu. b) Näytä esimerkillä, että jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuvat, niin $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ voi olla suppeneva sarja.

VASTAUS:

16.

Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneva sarja ja sen summa $= s$. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{k+2})$ suppenee, ja määritä sen summa.

VASTAUS: $2s - a_1 - a_2$.

17.

Osoita oikeaksi tai vääräksi seuraavat väitteet: a) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_k^2)$ suppenee. b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_k^2)$ suppenee.

VASTAUS: a) Väärä; b) väärä.

18.

Todista: Jos sarja $\sum |a_k|$ suppenee, niin myös sarja $\sum a_k$ suppenee. Päteekö käänteinen lause?

VASTAUS:

19.

Olkoot $\langle a_k \rangle$ ja $\langle b_k \rangle$ kaksi lukujonoa, joille pätee $a_k = b_{k+1} - b_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Osoita, että sarja $\sum a_k$ suppenee, jos ja vain jos jono $\langle b_k \rangle$ suppenee.

VASTAUS: