2. Sarjojen suppenemiskriteerejä

2.1. Geometrinen sarja

20.

Tutki, millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^k$$

suppenee. Määritä summafunktio ja piirrä sen kuvaaja.

VASTAUS: Suppenee, jos $x < -2$ tai $x > 0$; summa $= (3x+1)/(x+2)$.

21.

Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tan^k x$$

suppenee? Mikä on sen summa? Piirrä summafunktion kuvaaja.

VASTAUS:

22.

Tutki, millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cos 2x \sin^{2k} x$$

suppenee. Määritä summafunktio ja piirrä sen kuvaaja.

VASTAUS: Jos $-\pi/4 + n\pi < x < \pi/4 + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), niin summa $= 1$; pisteissä $x = \pi/4 + n\pi/2$ summa $= 0$; muulloin sarja hajaantuu.

23.

Millä reaalisilla muuttujan x arvoilla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$ suppenee? Mikä on tällöin sen summa?

VASTAUS: $x > 0$; summa $= e^x/(e^x - 1)$.

24.

Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

summa. Onko summafunktio jatkuva?

VASTAUS: Summa $= 1 + x^2$, jos $x \neq 0$; origossa $= 0$; epäjatkuva origossa.

25.

Kehitä funktio

$$f(x) = \frac{1}{a+bx}, \quad a \neq 0,\ b \neq 0,$$

sarjaksi a) muuttujan x nousevien, b) sen laskevien potenssien mukaan. Millä muuttujan arvoilla sarja suppenee?

VASTAUS: a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^k x^k / a^{k+1}$, $|x| < |a/b|$;
b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k / (b^{k+1} x^{k+1})$, $|x| > |a/b|$.

26.

Akhilles ja kilpikonna juoksevat kilpaa. Akhilles juoksee kymmenen kertaa niin nopeasti kuin kilpikonna. Varmana voitostaan Akhilles antaa kilpikonnalle yhden stadionin (164 – 192 metriä muinaiskreikkalaisesta paikkakunnasta riippuen) etumatkan. Kun Akhilles on juossut yhden stadionin, on kilpikonna juossut stadionin kymmenesosan ja on siis tämän verran edellä. Kun Akhilles on juossut tämän kymmenesosan verran lisää, on kilpikonna juossut yhden sadasosastadionin lisää ja on edelleen edellä. Näin kilpailu jatkuu loppumattomiin kilpikonnan jatkuvasti johtaessa. Eikö Akhilles voitakaan? Jos voittaa, niin miten pitkän matkan juostuaan hän ohittaa kilpikonnan?

VASTAUS: Ohitus $\frac{10}{9}$ stadionin kohdalla.

2.2. Positiivitermiset sarjat

27.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista annettuja positiivitermisten sarjojen suppenemistestejä käyttäen:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+k}{2+k^2}\right)^2, & \text{vertailutesti}, \\ \text{b)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin\frac{\pi}{2^k}, & \text{suhdetesti}, \\ \text{c)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})^{k^2}}{3^k}, & \text{juuritesti}, \\ \text{d)} & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}, & \text{integraalitesti}. \end{array}$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) suppenee; c) suppenee; d) hajaantuu.

28.

Olkoon $\alpha > 0$. Tutki integraalitestiä käyttäen, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}.$$

Perustele myös, miksi integraalitestiä voidaan käyttää. Miten sarja käyttäytyy, jos $\alpha \le 0$?

VASTAUS: Suppenee, jos ja vain jos $\alpha > 1$.

29.

Tutki vertailutestien avulla seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^3+2k-2}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2-7}}, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) hajaantuu; c) hajaantuu.

30.

Olkoon $\alpha > 0$. Muodosta sopiva vertailusarja, jolla voidaan tutkia sarjan

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k^{\alpha}-1}}{\sqrt{k^{2\alpha}-1}}$$

suppenemista. Millä parametrin α arvoilla sarja suppenee, millä hajaantuu?

VASTAUS:

31.

Olkoon $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < q < p$. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+q} - \frac{1}{k+p} \right).$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) suppenee; c) suppenee.

32.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k + 3}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^2+1}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k^2}}{k!}.$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) hajaantuu; c) hajaantuu.

33.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k}}{k!}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1+k^3}{1+k^5}}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} (pk)^{-\frac{k}{p}},\ p \in \mathbb{N}.$$

VASTAUS:

34.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k k}, \qquad \text{c)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}.$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) suppenee; c) suppenee.

35.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k^2}{1+k^3} \right)^k, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p+1}{k^q+1},\ p, q \in \mathbb{N}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)!}{3^k (k!)^2}.$$

VASTAUS:

36.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha}}{k},\ \alpha > 0, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k - 1}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^k}{k}.$$

VASTAUS:

37.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{\alpha}}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k)^{\alpha}}{k}, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln k}.$$

VASTAUS: a) Suppenee, jos ja vain jos $\alpha > 1$; b) suppenee, jos ja vain jos $\alpha < -1$; c) suppenee, jos ja vain jos $\alpha > 1$.

38.

Olkoon

$$a_k = \frac{k^k}{(k!)^2}.$$

Osoita, että $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ tarkastelemalla sarjaa $\sum a_k$.

VASTAUS: Osoita sarja suppenevaksi suhdetestillä.

39.

Todista: Jos $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq 0$ ja sarja $\sum a_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} k a_k = 0$.

VASTAUS: Sovella Cauchyn suppenemiskriteeriä.

40.

Osoita esimerkillä, että jos edellisessä tehtävässä luovutaan jonoa $\langle a_k \rangle$ koskevasta monotonisuusoletuksesta, niin väite ei enää välttämättä päde.

VASTAUS:

2.3. Vuorottelevat sarjat

41.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-10)^k}{k!}$$

suppenee. Määritä sarjan summa yhden tuhannesosan tarkkuudella.

VASTAUS:

42.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \ln k}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}.$$

VASTAUS: a) Suppenee; b) hajaantuu; c) suppenee.

43.

Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k},\qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln k},\qquad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

VASTAUS:

44.

Arvioi, montako termiä on otettava sarjasta

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2},$$

jotta sen summalle pisteessä $x=-\frac{1}{2}$ saataisiin likiarvo, jonka virhe on $< 10^{-4}$?

VASTAUS:

45.

Luku π voidaan laskea seuraavista sarjoista:

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\sqrt{3}(-1)^k}{3^k(2k+1)}.$$

Kuinka monta termiä sarjoihin on otettava, jotta π saataisiin 10 desimaalin tarkkuudella?

VASTAUS: 40 miljardia termiä; 20 termiä.

46.

Tarkastellaan sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, missä

$$a_{2p-1}=\frac{1}{\sqrt{p+1}-1},\qquad a_{2p}=-\frac{1}{\sqrt{p+1}+1},\qquad p=1,2,3,\ldots.$$

Kirjoita sarjan kahdeksan ensimmäistä termiä. Osoita, että sarja hajaantuu ryhmittämällä termit kahden termin ryhmiin (ts. laske $a_{2p-1}+a_{2p}$). Miksi sarjaan ei voida soveltaa Leibnizin lausetta?

VASTAUS:

47.

Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ suppeneva positiiviterminen sarja. Osoita, että tällöin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ suppenee. Päteekö väite yleisesti, jos luovutaan lukujen a_k positiivisuudesta?

VASTAUS:

48.

Laske jonkin symbolisen tietokoneohjelman avulla harmonisten sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty}1/k^p$ summia. Millaisia tuloksia saadaan luvun p eri arvoilla? Entä jos käytetään eksponenttina symbolia p? (Tuloksissa esiintyy ns. *Riemannin ζ-funktion* arvoja. Tällä funktiolla on tiettyä kuuluisuutta mm. siihen liittyvien avoimien matemaattisten ongelmien vuoksi.)

VASTAUS: