4. Funktiojonot ja funktiotermiset sarjat

4.1. Funktiojono ja funktioterminen sarja

60.

Tutki, millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla funktiojono $\langle f_k \rangle$ suppenee, kun

$$\text{a)}\ f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2k}+1}, \qquad \text{b)}\ f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2k}+1}, \qquad \text{c)}\ f_k(x) = \frac{x^k}{x^{2k}+1}.$$

Mikä on rajafunktio?

VASTAUS: a) Suppenee, kun $|x| \geq \sqrt{2}$; rajafunktio $f(x) = 0$, kun $|x| > \sqrt{2}$; $f(x) = 1$, kun $|x| = \sqrt{2}$;
b) suppenee, kun $|x| > 1$; rajafunktio $f(x) = 0$;
c) suppenee, kun $x \neq -1$; rajafunktio $f(x) = 0$, kun $|x| \neq 1$; $f(1) = \frac{1}{2}$.

61.

Tutki, millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ suppenee, kun

$$\text{a)}\ f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2k}+1}, \qquad \text{b)}\ f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2k}+1}, \qquad \text{c)}\ f_k(x) = \frac{x^k}{x^{2k}+1}.$$

Piirrä summafunktion kuvaaja.

VASTAUS: a) $|x| > \sqrt{2}$; b) $|x| > 1$; c) $|x| \neq 1$.

4.2. Pisteittäinen ja tasainen suppeneminen

62.

Määritä funktiojonon

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

rajafunktio joukossa $\mathbb{R}$. Piirrä funktioiden f_n kuvaajia. Onko suppeneminen tasaista?

VASTAUS: Rajafunktio $f(x) = 0$, kun $|x| < 1$; $f(x) = 1$, kun $|x| > 1$; $f(x) = \frac{1}{2}$, kun $|x| = 1$.

63.

Tarkastellaan reaalilukujoukossa funktiojonoja

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \quad \text{ja} \quad g_n(x) = f_n'(x).$$

Piirrä funktioiden kuvaajia. Tutki, suppenevatko funktiojonot tasaisesti. Millaisia ovat rajafunktiot?

VASTAUS: Jono $\langle f_n \rangle$ suppenee tasaisesti, jono $\langle g_n \rangle$ ei; rajafunktiot $f(x) = 0\ \forall x$ ja $g(x) = 0$, jos $x \neq 0$, $g(0) = 1$.

64.

Tarkastellaan reaalilukujoukossa funktiojonoja

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad \text{ja} \quad g_n(x) = f_n'(x).$$

Piirrä funktioiden kuvaajia. Tutki, suppenevatko funktiojonot tasaisesti. Millaisia ovat rajafunktiot?

VASTAUS:

65.

Olkoon

$$f_(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0,1].$$

Määritä rajafunktio $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ja tutki, onko suppeneminen tasaista. Piirrä funktioiden kuvaajia.

VASTAUS:

66.

Olkoon

$$f_n(x) = \lim_{p\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2p}, \quad x \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{N}.$$

Suppeneeko funktiojono $\langle f_n \rangle$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$? Minkälainen on rajafunktio? Tarkastele erikseen muuttujan x rationaali- ja irrationaaliarvoja.

VASTAUS:

67.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k}$$

suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$. Piirrä summafunktion kuvaaja.

VASTAUS:

68.

Osoita Weierstrassin testiä käyttäen, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1+kx^2)}$$

suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$.

VASTAUS: Valitse $M_k =$ termin itseisarvon maksimi.

69.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$$

suppenee tasaisesti jokaisella rajoitetulla välillä $[-a,a]$. Voidaanko tarkastelussa käyttää Weierstrassin testiä? Entä Leibnizin lausetta?

VASTAUS: Leibnizin lausetta voidaan käyttää, Weierstrassin testiä ei.

70.

Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}$$

tasaisesti välillä $[0,\infty[$. Onko suppeneminen tasaista välillä $[a,\infty[$, missä $a>0$?

VASTAUS:

71.

Osoita Weierstrassin testiä käyttäen, että funktioterminen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{|z|^{2k}+2}$ suppenee tasaisesti kompleksitason ympyrärenkaassa $2 \leq |z| \leq 3$.

VASTAUS:

72.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{10^k}$$

suppenee tasaisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Laske sarjan summa pisteissä $x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$.

VASTAUS:

73.

Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+z^2}$$

tasaisesti siinä kompleksitason joukossa, joka saadaan poistamalla termien nimittäjien nollakohdat ympyrästä $|z| \leq R$ (R vakio).

VASTAUS:

74.

Oletetaan, että sarja $\sum f_k(x)$ suppenee tasaisesti ja $\sum |f_k(x)|$ pisteittäin välillä $[a,b]$. Seuraako tästä, että $\sum |f_k(x)|$ suppenee tasaisesti ko. välillä? Tarkastele esimerkkinä funktioita $f_k(x) = (-1)^k x^k (1-x)$ välillä $[0,1]$.

VASTAUS:

4.3. Tasainen suppeneminen ja jatkuvuus

75.

Tutki, millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^k}$$

suppenee ja määritä sen summa. Piirrä summafunktion kuvaaja. Onko summafunktio määrittelyalueessaan jatkuva? Suppeneeko sarja tasaisesti välillä $[0,1]$? Entä välillä $[1,2]$? Perustele vastauksesi.

VASTAUS:

76.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

suppenee tasaisesti koko reaalilukujoukossa. Onko sarjan summafunktio jatkuva? Piirrä tämän kuvaaja.

VASTAUS:

4.4. Termeittäin derivointi ja integrointi

77.

Funktiojono $\langle f_n \rangle$ määritellään seuraavasti:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n, & \text{kun } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritä jonon rajafunktio. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \text{ ?}$$

VASTAUS: Rajafunktio $f(x) = 0\ \forall x$; ei päde.

78.

Olkoon $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olkoon $\langle f_n \rangle$ edellisen tehtävän funktiojono. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx.$$

VASTAUS: $g(0)$.

79.

Laske sarjojen

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kx}$$

summafunktiot. Millä muuttujan arvoilla sarjat suppenevat?

VASTAUS:

80.

Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$$

summa laskemalla ensin integraali $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\,dx$. Perustele laskusi.

VASTAUS: $\ln 2$.

81.

Osoita, että sarja

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kx}$$

suppenee tasaisesti välillä $[1,2]$ ja laske integraali $\int_1^2 s(x)\,dx$.

VASTAUS:

82.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^k \pi x}{2^k}$$

suppenee tasaisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Voidaanko sarja derivoida termeittäin? Piirrä alkuperäisen sarjan ja termeittäin derivoimalla saadun sarjan osasummien kuvaajia.

VASTAUS:

83.

Tutki, millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ funktio

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}/k^2$$

on määritelty. Millä alueella summafunktion derivaatta ja integraalifunktio voidaan muodostaa termeittäin derivoimalla ja integroimalla?

VASTAUS: Määritelty, kun $x \leq 0$; voidaan derivoida termeittäin, kun $x < 0$; integroida, kun $x \leq 0$.