5. Potenssisarjat

5.1. Määritelmä ja suppeneminen

84.

Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemisympyrät:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z+3}{2k}\right)^k, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{z}{2+(-1)^k}\right]^k, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(z-i)^k.$$

VASTAUS: a) Koko kompleksitaso; b) $z_0 = 0$, $R = 1$; c) $z_0 = i$, $R = 4$.

85.

Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemisympyrät:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2k}\right)^k, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{z-1-i}{2+i^k}\right]^k, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}z^{2k}.$$

VASTAUS:

86.

Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemisympyrät:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}(z-1)^k, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}(z-i)^k, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty}k^p(z+2+3i)^k, \quad p \in \mathbb{N}.$$

VASTAUS:

87.

Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^k$$

suppenemissäde. Piirrä summafunktion kuvaaja.

VASTAUS:

88.

Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{2^k}z^{2k}$$

suppenemissäde ja summa palauttamalla se sopivaan geometriseen sarjaan.

VASTAUS:

89.

Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k x^{2k-1}$$

summa tulkitsemalla se erään toisen sarjan derivaataksi. Mikä on sarjan suppenemissäde?

VASTAUS: $-x/(1+x^2)^2$, $R=1$.

90.

Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} k/3^k$ suppenee ja määritä sen summa.

VASTAUS:

91.

Funktio f määritellään potenssisarjan summana

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[2+(-1)^k]^k}\, z^k$$

suppenemisympyrässä. Piirrä funktion kuvaaja, kun muuttuja z rajoitetaan reaaliseksi.

VASTAUS:

92.

Potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

kertoimet toteuttavat rekursion

$$c_1 = 1, \qquad c_{k+1} = \left(k - k^2 \ln \frac{k+1}{k}\right) c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Määritä sarjan suppenemissäde ja piirrä summafunktion kuvaaja reaalialueella summeeraamalla sarjan termejä. Piirrä osasummien kuvaajia myös jonkin matkaa suppenemisalueen ulkopuolelle.

VASTAUS: 2.

93.

Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ suppenee, kun tiedetään, että $k \leq a_k \leq k^2$ kaikilla indekseillä k?

VASTAUS: $-1 < x < 1$.

94.

Kehitä funktio

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

potenssisarjaksi lausekkeen $z-i$ potenssien mukaan muokkaamalla funktion lauseke sopivan geometrisen sarjan summan muotoon. Mikä on sarjan suppenemisympyrä?

VASTAUS:

95.

Kehitä funktio

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

potenssisarjaksi lausekkeen $z+3$ potenssien mukaan. Mikä on sarjan suppenemisympyrä?

VASTAUS:

96.

Muodosta origokeskinen potenssisarja funktiolle

$$f(z) = \frac{1}{2 - z^2}.$$

Mitä voidaan sanoa tämän suppenemisjoukosta?

VASTAUS: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^{2k}$; suppenee, kun $|z| < \sqrt{2}$.

97.

Muodosta funktion

$$f(z) = \frac{2z+5}{z^2+2z+5}$$

osamurtokehitelmä kompleksialueella. Tulkitse syntyneet termit lausekkeen $z-1$ potenssien mukaan etenevien geometristen sarjojen summiksi ja muodosta funktion potenssisarja pisteessä $z = 1$. Arvioi sarjan kertoimien avulla numeerisesti suppenemissädettä. Millä reaaliakselin avoimella välillä sarja suppenee? Miten suppenemissäde suhtautuu nimittäjän nollakohtiin?

VASTAUS:

98.

Olkoon funktio f määritelty potenssisarjan avulla:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

Merkitään

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k;$$

tässä $B_0, B_1, B_2, \ldots$ ovat *Bernoulli'n lukuja*. Määritä viisi ensimmäistä Bernoulli'n lukua muodostamalla sarjojen Cauchyn tulo.

VASTAUS:

5.2. Taylorin sarja

99.

Olkoon

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad \text{kun } x \neq 0, \qquad \text{ja} \qquad f(0) = \lim_{x\to 0} f(x).$$

Muodosta funktion f Maclaurinin sarja.

VASTAUS:

5.3. Alkeisfunktioiden Taylorin sarjat

100.

Muodosta funktion $\overline{\text{arc}}\tan x$ Maclaurinin sarjat pisteissä $x = 1$ ja $x = 1/\sqrt{3}$. Todista, että nämä suppenevat ja että niiden summat ovat $\overline{\text{arc}}\tan 1$ ja $\overline{\text{arc}}\tan(1/\sqrt{3})$. Miten näiden avulla voidaan laskea luvun π likiarvoja? Montako termiä tarvitaan, jotta π saadaan 10 desimaalin tarkkuudella?

VASTAUS:

101.

Sinifunktion arvoja lasketaan Maclaurinin sarjasta välillä $[10\pi, 12\pi]$ ottamalla huomioon 60 nollasta eroavaa termiä. Arvioi tällöin syntyvää virhettä Leibnizin testin virhearvion mukaisesti. Piirrä sinifunktion kuvaaja ja approksimaatiofunktion kuvaaja. Havainto? Sen selitys?

VASTAUS:

102.

Muodosta origokeskinen potenssisarja funktiolle $\ln(1+x)$ ja tämän avulla funktiolle

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Mitkä ovat sarjojen suppenemissäteet? Minkä lukujen logaritmit jälkimmäisen sarjan avulla voidaan laskea?

VASTAUS: $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$, $R = 1$; voidaan laskea kaikkien lukujen logaritmit.

103.

Juurelle $\sqrt[n]{x}$ voidaan laskea likiarvoja kirjoittamalla juurrettava muotoon $x = p^n + y$ ja kehittämällä funktio $\sqrt[n]{x} = f(y) = (p^n + y)^{1/n}$ binomisarjaksi. Tässä p on sellainen luonnollinen luku, jonka n:s potenssi lähellä lukua x. Tutki approksimaatiota tapauksessa $x \in [15600, 15650]$, $n = 6$. Miten saavutettava tarkkuus riippuu binomisarjaan otettavien termien lukumäärästä? Tutki erityisesti juurelle $\sqrt[6]{15620}$ saatavia likiarvoja.

VASTAUS:

104.

Esitä binomisarjaan perustuva menettely, jolla funktio $(a+bx)^\alpha$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$) voidaan kehittää sarjaksi pisteessä $x = c$. Mikä on kehitelmän suppenemisväli?

VASTAUS: $(a+bx)^\alpha = (a+bc)^\alpha \left[1 + \dfrac{b(x-c)}{a+bc}\right]^\alpha$, $|x-c| < |(a+bc)/b|$.

105.

Muodosta origokeskiset Taylorin sarjat funktioille e^{z_1} ja e^{z_2}. Laske näiden Cauchyn tulo ja totea, että se on lausekkeen $e^{z_1+z_2}$ Taylorin sarja.

VASTAUS:

106.

Esitä funktioiden e^x ja e^{-x} origokeskiset Taylorin sarjat. Muodosta näiden Cauchyn tulo. Millaisia lukuja ovat tämän kertoimet?

VASTAUS:

5.4. Eri tapoja muodostaa Taylorin sarja

107.

Johda Maclaurinin sarja funktiolle $\sin^2 x$. Tapoja on useita; esitä ainakin kolme.

VASTAUS:

108.

Muodosta Maclaurinin sarja funktiolle $\cos^2 x$ ainakin kolmella eri tavalla.

VASTAUS:

109.

Muodosta funktiolle $e^x \cos x$ potenssisarja a) käyttäen Cauchyn tuloa, b) tarkastelemalla kompleksista eksponenttifunktiota e^z.

VASTAUS:

110.

Esitä vähintään kolme eri tapaa muodostaa funktion $\overline{\mathrm{arc}}\sin x$ Maclaurinin sarja. Mikä on sarjan suppenemisympyrä kompleksitasossa?

VASTAUS:

111.

Muodosta funktion $y = \tan x$ Maclaurinin sarja $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sijoittamalla tähän sarjaan funktion $x = \overline{\mathrm{arc}}\tan y$ Maclaurinin sarja ja vaatimalla, että tulos on $= y$.

VASTAUS:

112.

Laske funktion e^{x^4} kaikkien derivaattojen arvot origossa sarjakehitelmän avulla.

VASTAUS:

113.

Etsi sellainen potenssisarja, että tämän Cauchyn tulo itsensä kanssa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!} z^{2k}.$$

Mikä tunnettu trigonometrian kaava on kyseessä?

VASTAUS: Funktion $\sin(z/2)$ potenssisarja; $\sin^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$.

114.

Johda Maclaurinin sarja funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Millä arvoilla sarja suppenee? Laske $f(1)$ kymmenen desimaalin tarkkuudella. Laske tulos myös integroimalla numeerisesti.

VASTAUS: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}$, suppenee kaikkialla; $f(1) \approx 0.7468241328$.

115.

Muodosta funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin tx}{t}\, dt,$$

origokeskinen Taylorin sarja. Millä muuttujan x arvoilla sarja suppenee?

VASTAUS: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!(2k+1)}$; suppenee kaikilla x.

116.

Piirrä funktion

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin tx}{t}\, dt$$

kuvaaja, kun $x \in [0, 10]$. Etsi nelidesimaalinen likiarvo luvulle $f(10)$.

VASTAUS:

117.

Laske viisidesimaalinen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

sarjakehitelmää käyttäen.

VASTAUS:

118.

Laske viisidesimaalinen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$$

sarjakehitelmää käyttäen.

VASTAUS:

119.

Kehitä sarjaksi muuttujan x potenssien mukaan funktio

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}.$$

VASTAUS:

120.

Muodosta jonkin symbolisen tietokoneohjelman avulla funktion

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{\cos x}$$

Maclaurinin sarjan osasummia. Piirrä osasumien kuvaajia ja vertaa niitä itse funktioon.

VASTAUS:

121.

Muodosta Maclaurinin sarjat *Fresnelin integraaleille*

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt, \qquad C(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt.$$

Millä muuttujan x arvoilla nämä sarjat suppenevat?

VASTAUS:

122.

Muodosta astetta 10 olevat Taylorin polynomit funktiolle $\overline{\text{arc}}\sin x$ pisteissä $x = 0$ ja $x = \frac{1}{2}$. Piirrä funktion ja polynomien kuvaajat.

VASTAUS: