6. Fourier'n sarjat

6.1. Fourier'n kertoimet

123.

Muodosta funktion $f : \,]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, trigonometrinen Fourier'n sarja. Piirrä sarjan osasummien kuvaajia.

VASTAUS:

124.

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on 2π-jaksoinen ja sen arvot välillä $[0, 2\pi[$ lasketaan lausekkeesta $f(x) = x$. Muodosta funktion trigonometrinen Fourier'n sarja.

VASTAUS:

125.

Muodosta a) eksponenttimuotoinen, b) trigonometrinen Fourier'n sarja funktiolle $f(x) = |x|$ välillä $[-\pi, \pi]$.

VASTAUS: $c_k = [(-1)^k - 1]/(\pi k^2)$, jos $k \neq 0$; $c_0 = \pi/2$;
$a_k = 2[(-1)^k - 1]/(\pi k^2)$, jos $k \neq 0$; $a_0 = \pi$; $b_k = 0$.

126.

Muodosta funktion $f(x) = |x|$ eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja välillä $[-1, 1]$. Kirjoita sarja myös trigonometriseen muotoon.

VASTAUS:

127.

Laske Fourier'n sarja välillä $]-1, 1[$ a) eksponenttimuodossa, b) trigonometrisessa muodossa funktiolle $f(x) = -1$, kun $x \in \,]-1, 0[$, ja $= 1$, kun $x \in \,]0, 1[$.

VASTAUS:

128.

Kehitä funktio x^2 trigonometriseksi Fourier'n sarjaksi välillä $[-p, p]$.

VASTAUS:

129.

Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad -\pi \leq x \leq -\pi/2 \quad \text{tai} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{kun} \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \end{cases}$$

trigonometrinen Fourier'n sarja.

VASTAUS:

130.

Muodosta trigonometrinen Fourier'n sarja funktiolle f, jonka jaksona on 2 ja joka saa seuraavat arvot:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{kun } -1 < x < 0 \text{ tai } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

VASTAUS:

131.

Funktion jaksona on $2p$ ja se muodostuu kolmioaalloista:

$$f(x) = \begin{cases} p+x, & \text{kun } x \in \,]-p, 0[, \\ p-x, & \text{kun } x \in \,]0, p[. \end{cases}$$

Piirrä funktion kuvaaja ja laske sen trigonometrinen Fourier'n sarja.

VASTAUS:

132.

Osoita, että parillisen reaalifunktion trigonometrinen Fourier'n sarja sisältää yksinomaan kosinitermejä ja parittoman funktion sinitermejä.

VASTAUS:

133.

Olkoot f ja g jatkuvia 2π-jaksoisia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden eksponenttimuotoisen Fourier'n sarjan kertoimet ovat c_k ja d_k. Näiden funktioiden *konvoluutio* $h = f * g$ määritellään yhtälöllä

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Osoita, että h on 2π-jaksoinen ja sen Fourier'n kertoimet ovat $e_k = c_k d_k$.

VASTAUS:

6.2. Suppeneminen

134.

Olkoon $f(x) = e^x$ välillä $[-\pi, \pi]$. Muodosta funktion eksponenttimuotoinen ja trigonometrinen Fourier'n sarja. Piirrä Fourier'n sarjan osasummien kuvaajia. Tarkastele väliä $[-2\pi, 2\pi]$. Suppeneeko sarja tasaisesti?

VASTAUS:

135.

Muodosta eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja funktiolle $f(x) = |x|$ välillä $[-\pi, \pi]$. Suppeneeko tämä tasaisesti kohden funktiota f?

VASTAUS:

136.

Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \in \,]-\pi, 0[, \\ 1, & \text{kun } x \in \,]0, \pi[, \end{cases}$$

eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja. Suppeneeko se tasaisesti kohden funktiota f? Saadaanko sarja derivoimalla funktion $|x|$ Fourier'n sarja termeittäin?

VASTAUS:

137.

Laske sarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

summat käyttämällä hyväksi funktion $f(x) = |x|$ Fourier'n sarjaa välillä $[-\pi, \pi]$.

VASTAUS: $\pi^2/8, \quad \pi^4/96$.

138.

Muodosta Fourier'n sarja funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{kun } x \in\,]-\pi, 0[, \\ x^2, & \text{kun } x \in\,]0, \pi[. \end{cases}$$

Miten tämä suhtautuu sarjaan, joka saadaan funktion $|x|$ Fourier'n sarjasta termeittäin integroimalla?

VASTAUS:

139.

Muodosta funktion $f(x) = x^2$ Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$. Suppeneeko sarja tasaisesti?

VASTAUS:

140.

Määritä funktion x^2 Fourier'n sarjan avulla sarjojen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

summat.

VASTAUS:

141.

Muodosta funktion x^3 Fourier'n sarja käyttämällä hyväksi funktion x^2 Fourier'n sarjaa.

VASTAUS:

142.

Muodosta funktion $\sinh x$ eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$. Miten helpoimmin saadaan trigonometrinen Fourier'n sarja? Suppeneeko sarja tasaisesti?

VASTAUS:

143.

Derivoi funktion $\sinh x$ Fourier'n sarja termeittäin. Onko tulos jonkin funktion Fourier'n sarja? Minkä? Suppeneeko sarja tasaisesti?

VASTAUS:

144.

Muodosta eksponenttimuotoiset Fourier'n sarjat funktioille

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in\,]-\pi, 0[, \\ x, & \text{kun } x \in\,]0, \pi[\end{cases} \qquad \text{ja} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in\,]-\pi, 0[, \\ 1, & \text{kun } x \in\,]0, \pi[. \end{cases}$$

Suppenevatko sarjat a) pisteittäin, b) tasaisesti kohti funktioita? Piirrä osasummien kuvaajia.

VASTAUS:

6.3. Sini- ja kosinisarjat

145.

Määritä kertoimet b_k siten, että yhtälö

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$$

on voimassa välillä $]0, 1[$. Suppeneeko sarja tasaisesti? Päteekö yhtälö välin päätepisteissä?

VASTAUS:

146.

Kehitä funktio $\cos^2 x$ a) sinisarjaksi, b) kosinisarjaksi välillä $[0, \pi]$. Millaisia 2π-jaksoisia funktioita sarjat esittävät?

VASTAUS:

147.

Funktio f määritellään välillä $]0, 1[$ asettamalla $f(x) = 1 - x$. Kehitä tämä a) sinisarjaksi, b) kosinisarjaksi. Minkälaisia jaksollisia funktioita sarjojen summat ovat?

VASTAUS: