2. Reaaliarvoiset funktiot

2.1. Jatkuvuus

23.

Tutki funktion

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

raja-arvoa, kun piste (x,y) lähestyy origoa pitkin seuraavia xy-tason käyriä: a) $y=ax$, b) $y=ax^2$, c) $y^2=ax$. Onko funktiolla raja-arvoa origossa?

VASTAUS: a) $a/(1+a^2)$; b) 0; c) 0; ei ole raja-arvoa origossa.

24.

Tutki, onko seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla raja-arvoa origossa:

$$\text{a) } \frac{x}{|x|+|y|}, \quad \text{b) } \frac{x^2}{|x|+|y|}, \quad \text{c) } \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \text{d) } \frac{y^2}{x^4+y^2}.$$

VASTAUS:

25.

Tarkastellaan funktiota $f(x,y)=x^y$, missä $x\geq 0$, $y\geq 0$, $(x,y)\neq(0,0)$. Osoita, että funktiolla ei ole raja-arvoa origossa. Mitä arvoja funktio saa jokaisessa origon ympäristössä? Piirrä funktion kuvaaja origon ympäristössä.

VASTAUS:

26.

Olkoon geometrisessa avaruudessa E^3 määriteltynä reaaliarvoinen funktio

$$f(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}\neq 0,$$

missä **a** ja **b** ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita. Tutki, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{r}).$$

VASTAUS: Ei ole.

27.

Funktio $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0)=a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{a) } \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad \text{b) } \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}, \quad \text{c) } \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{d) } \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{x^2+y^2}, \quad \text{e) } \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

VASTAUS: a) Ei voida; b) $a=0$; c) $a=0$; d) $a=\frac{1}{2}$; e) $a=1$.

28.

Tutki, voidaanko funktiot

$$\text{a) } \frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad \text{b) } \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad \text{c) } \frac{1-\cos(x+y)}{x^2+y^2}, \quad \text{d) } \frac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

määritellä origossa siten, että niistä tulee jatkuvia. Piirrä funktioiden kuvaajat origon ympäristössä.

VASTAUS:

29.

Olkoon $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x^2 < y < 2x^2, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinainen raja-arvo ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio ei ole jatkuva?

VASTAUS:

30.

Funktio $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olkoon jatkuva avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{R}^n$; olkoon $x_0 \in G$ ja $f(x_0) > 0$. Osoita, että on olemassa ympäristö $U_\varepsilon(x_0)$ siten, että $f(x) > 0$, kun $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

VASTAUS:

31.

Funktio $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olkoon kaikkialla jatkuva; olkoot a ja b reaalilukuja, $a < b$. Osoita, että joukko $S = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a < f(x) < b \,\}$ on avoin. Määritä S tapauksessa $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x+2y}$, $a = 1$, $b = 2$.

VASTAUS:

32.

Funktio $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olkoon kaikkialla jatkuva. Todista, että joukko $S = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \,\}$ on suljettu. Määritä S tapauksessa $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

VASTAUS:

33.

Funktio $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olkoon jatkuva ja $\neq 0$ kompaktissa joukossa $S \subset \mathbb{R}^n$. Päättele, että on olemassa reaaliluku $a > 0$ siten, että $|f(x)| \geq a$ kaikilla $x \in S$. Onko tulos voimassa, jos S ei ole kompakti? Esitä esimerkkejä.

VASTAUS:

34.

Funktio $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olkoon kaikkialla jatkuva ja sillä olkoon ominaisuudet

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0, \qquad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \text{siten, että} \quad f(x_1)f(x_2) < 0.$$

Päättele, että funktion arvojoukolla $\{\, f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \,\}$ on maksimi ja minimi. Päteekö tulos, jos luovutaan funktion jatkuvuudesta tai jommastakummasta lisäominaisuudesta? Esitä esimerkkejä.

VASTAUS:

35.

Funktio $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olkoon kaikkialla jatkuva ja sillä olkoon ominaisuus

$$f(x,y) < \frac{1}{1+x^2+y^2} \;\forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että on olemassa reaaliluku $a < 1$ siten, että $f(x,y) \leq a$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

VASTAUS:

2.2. Osittaisderivaatat

36.

Muodosta seuraavien funktioiden osittaisderivaatat kaikkien esiintyvien muuttujien suhteen:

$$\text{a) } xy^3 + x\sin(xy), \quad \text{b) } \ln\sin(x-2y), \quad \text{c) } \overline{\text{arc}}\sin\frac{y}{x}, \quad \text{d) } \log_y x,$$
$$\text{e) } (xy)^z, \quad \text{f) } z^{xy}, \quad \text{g) } x^{y^x}, \quad \text{h) } x^{y^z}.$$

VASTAUS: a) $y^3 + \sin(xy) + xy\cos(xy)$, $3xy^2 + x^2\cos(xy)$; b) $\cot(x-2y)$, $-2\cot(x-2y)$;
c) $-y/(|x|\sqrt{x^2-y^2})$, $(\operatorname{sgn} x)/\sqrt{x^2-y^2}$; d) $1/(x\ln y)$, $-\log_y x/(y\ln y)$;
e) $z(xy)^z/x$, $z(xy)^z/y$, $(xy)^z\ln(xy)$; f) $yz^{xy}\ln z$, $xz^{xy}\ln z$, xyz^{xy-1};
g) $x^{y^x}y^x(\ln x\ln y + 1/x)$, $x^{y^x}xy^{x-1}\ln x$; h) $y^z x^{y^z-1}$, $x^{y^z}zy^{z-1}\ln x$, $x^{y^z}y^z\ln x\ln y$.

37.

Laske kunkin funktion tapauksessa annettu osittaiderivaattalauseke ja saata se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon:

$$\text{a) } f(x,y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \quad xf_x + yf_y,$$
$$\text{b) } f(x,y,z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz), \quad f_x + f_y + f_z,$$
$$\text{c) } f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{x/z}, \quad xf_x + yf_y + zf_z.$$

VASTAUS: a) $1/2$; b) $3/(x+y+z)$; c) 0.

38.

Tutki, ovatko funktiot a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, b) $(x+y)|x+y|$ derivoituvia origossa? Entä jatkuvasti derivoituvia?

VASTAUS: a) Ei ole; b) on kumpaakin.

39.

Missä suoran $y = x$ pisteissä funktiolla $f(x,y) = |x^2 - y^2|$ on osittaisderivaatat f_x ja f_y?

VASTAUS:

40.

Määritä funktion

$$f(x,y) = \frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

osittaisderivaatat kaikkialla ja osoita, että ne ovat jatkuvia.

VASTAUS:

41.

Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4\sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että nämä ovat yhtä suuria.

VASTAUS: Yhteinen lauseke $12xy+12x^2\cos y-2y\cos(xy)+xy^2\sin(xy)$.

42.

Laske funktion $f(x,y)=x^y$ ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat, kun $x>0,\ y\in\mathbb{R}$. Ovatko toisen kertaluvun sekaderivaatat yhtä suuria?

VASTAUS:

43.

Laske funktion

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \text{kun } (x,y)\neq(0,0),\quad f(0,0)=0$$

ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat origossa ja muualla. Laske toisen kertaluvun sekaderivaatat $f_{xy}(0,0)$ ja $f_{yx}(0,0)$; totea, että nämä ovat eri suuret. Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS:

44.

Osoita, että funktiot a) $\ln(x^2+y^2)$, b) $\overline{\text{arc}}\tan\frac{y}{x}$, c) $e^{ax}\cos(ay)$ (a vakio) ovat Laplacen differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

ratkaisuja eli ns. *harmonisisia funktioita*.

VASTAUS:

45.

Osoita, että funktio $f(x,t)=u(x+at)+v(x-at)$, missä u ja v ovat kahdesti derivoituvia funktioita $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ja a vakio, toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $f_{tt}=a^2 f_{xx}$.

VASTAUS:

46.

Olkoot f ja g kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Määritä vakiot a ja k siten, että funktio $u(x,y)=xf(x+ay)+yg(x+ay)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

VASTAUS:

47.

Osoita, että funktio $u(x,y)=xf(x+y)+yg(x+y)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

olivatpa f ja g mitä tahansa kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

VASTAUS:

48.

Olkoot u ja v derivoituvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = u(x) + v(y)$, toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Osoita kääntäen, että jokaisella tämän differentiaaliyhtälön ratkaisulla on em. muoto.

VASTAUS:

2.3. Differentiaalikehitelmä

49.

Laske funktion lisäys Δf, differentiaali df ja korjaustermi, kun $f(x,y) = x^2 y$, $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0.2$ ja $\Delta y = -0.1$.

VASTAUS:

50.

Muodosta seuraavien funktioiden (kokonais)differentiaalit:

$$\text{a) } \overline{\text{arc}}\tan yx, \qquad \text{b) } \frac{x}{yz}, \qquad \text{c) } x^{y \ln z}, \qquad \text{d) } \ln \tan \frac{y}{x}.$$

VASTAUS:

51.

Arvioi differentiaalin avulla lausekkeen

$$z = e^{x \sin y}\, \overline{\text{arc}}\tan x$$

arvoa, kun $x = 1 \pm 0.001$ ja $y = 30 \pm 0.02°$.

VASTAUS: $z \approx \sqrt{e}\pi/4 \pm \sqrt{e}(36 + 9\pi + \sqrt{3}\pi^2/72000 \approx 1.2949 \pm 0.0019$.

52.

Osoita suoraan differentioituvuuden määritelmän perusteella, että funktio $f(x,y) = x \cos y$ on differentioituva koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

VASTAUS:

53.

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{kun } x \neq y, \\ f'(x), & \text{kun } x = y. \end{cases}$$

Osoita, että g on differentioituva pisteessä (a,a), jos $f''(a)$ on olemassa.

VASTAUS:

54.

Missä tason $\mathbb{R}^2$ pisteissä funktio $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ on differentioituva?

VASTAUS:

55.

Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \text{kun } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

osittaisderivaatat origossa. Osoita, että funktio on differentioituva. Osoita, että osittaisderivaatat eivät ole jatkuvia origossa.

VASTAUS: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$; ratkaise funktion differentiaalikehitelmästä ε-funktio ja tutki sen raja-arvoa;
$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
$f_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
kun $(x,y) \neq (0,0)$.

56.

Olkoon

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{kun } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

Määritä funktion osittaisderivaatat origossa ja osoita, että funktio ei ole differentioituva origossa. Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Ratkaise funktion differentiaalikehitelmästä ε-funktio ja tutki sen raja-arvoa.

57.

Olkoon reaaliarvoinen funktio f määritelty avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{R}^n$ ja differentioituva pisteessä $x_0 \in G$. Todista, että tällöin f toteuttaa *Lipschitzin ehdon* pisteessä x_0: On olemassa vakio $M > 0$ ja ympäristö $U_\varepsilon(x_0)$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M\|x - x_0\| \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0).$$

VASTAUS:

58.

Laske funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + 2y^2 + 4xy$ differentiaali pisteessä $(-3,2)$. Mikä on tämän yhteys pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitasoon?

VASTAUS:

59.

Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

a) $f(x,y) = e^{x+y}, \quad \mathbf{i}+\mathbf{j}, \quad (0,0)$,
b) $f(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y^2), \quad \mathbf{i}-2\mathbf{j}, \quad (1,2)$,
c) $f(x,y,z) = xy^2z^3, \quad 6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \quad (-3,2,1)$,
d) $f(x,y,z) = xy^2+yz^3, \quad \mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}, \quad (3,-1,4)$.

VASTAUS: a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.

60.

Laske funktion $f(x,y,z) = xy + \cos x + y^2 z$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ja gradientti pisteessä $(\pi/2, 1, -\pi/2)$. Mitä gradientti ilmaisee funktiosta f ? Entä pinnasta $f(x,y,z) = 0$?

VASTAUS:

61.

Mihin suuntaan funktio $f(x,y,z) = x^3 - 2xy^2 z + 5yz^4$ kasvaa nopeimmin pisteessä $(2, -2, 1)$? Mikä on funktion derivaatta tähän suuntaan? Piirrä funktion kuvaaja, kun se rajoitetaan tämän suuntaiselle ko. pisteen kautta kulkevalle suoralle.

VASTAUS:

62.

Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3$. Tutki, mihin suuntaan pisteestä $(3, -1, 4)$ on edettävä, jotta a) funktio kasvaisi mahdollisimman nopeasti, b) funktio ei kasvaisi lainkaan. Mikä on funktion derivaatta nopeimman kasvun suuntaan?

VASTAUS: a) $\mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k}$; b) kohtisuoraan eo. suuntaa vastaan. Derivaatta nopeimman kasvun suuntaan $\sqrt{5669} \approx 75.29$.

63.

Tutki, mihin suuntaan $\mathbf{v}$ funktio $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3$ kasvaa nopeimmin pisteessä $P \mathrel{\widehat{=}} (3, -1, 2)$. Muodosta yhden muuttujan funktio, joka kuvaa funktion f käyttäytymistä pisteen P kautta kulkevalla vektorin $\mathbf{v}$ suuntaisella suoralla; valitse argumentiksi etäisyys pisteestä P (positiivisena vektorin $\mathbf{v}$ suuntaan, negatiivisena vastakkaiseen suuntaan).

VASTAUS:

64.

Etsi pisteet, joissa funktion $f(x,y,z) = xy + \cos x + y^2 z$ gradientti on yz-tason suuntainen.

VASTAUS:

65.

Tutki gradienttia käyttäen, missä pisteissä käyrän $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ tangentti on a) pystysuora, b) vaakasuora, c) kaltevuudeltaan 45°.

VASTAUS:

66.

Mihin suuntiin funktion $f(x,y) = 2x - y^2$ suunnattu derivaatta origossa on $= 0$?

VASTAUS:

67.

Mihin suuntiin funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0,$$

origossa muodostettu suunnattu derivaatta on olemassa? Onko f differentioituva origossa?

VASTAUS:

68.

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja grad $f(x_0) \neq O$. Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi yksikkövektori $w \in \mathbb{R}^n$ siten, että suunnattu derivaatta suuntaan w pisteessä x_0 on $= \|\,\mathrm{grad}\, f(x_0)\|$.

VASTAUS:

69.

Graafisen esityksen perusteella on käyrän $y = f(x)$ ensimmäiselle ja toiselle derivaatalle saatu tarkastelukohdan ympäristössä arviot

$$2.995 < f'(x) < 3.005, \quad 1.99 < f''(x) < 2.01.$$

Määritä differentiaalia käyttäen likimääräiset virherajat käyrän kaarevuussäteelle kyseisessä kohdassa.

VASTAUS: $R \approx 5\sqrt{10} \pm 19\sqrt{10}/400 \approx 15.81 \pm 0.15.$

70.

Helsingin ja Tokion maantieteelliset koordinaatit asteen tarkkuudella ovat seuraavat:

Helsinki:	60° N ,	25° E ;
Tokio:	36° N ,	140° E .

Maapallon säde on 6370 km kymmenen kilometrin tarkkuudella. Arvioi kokonaisdifferentiaalia käyttäen, millä tarkkuudella kaupunkien lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna voidaan näistä tiedoista laskea, kun oletetaan maa täysin pallonmuotoiseksi.

VASTAUS:

71.

Pisteen B etäisyys pisteestä A määritettiin kolmannen pisteen C avulla. Mittaustulokset olivat

$$|BC| = 265 \pm 0.5 \text{ m}, \quad \sphericalangle ACB = 45 \pm 0.1^\circ, \quad \sphericalangle ABC = 105 \pm 0.1^\circ.$$

Laske pisteiden A ja B välinen etäisyys ja sille suhteellinen virheraja.

VASTAUS:

72.

Pystysuoran lipputangon varjo vaakasuoralla kentällä havaitaan kahtena ajankohtana. Tänä aikana varjo on kiertynyt kulman $21^\circ 30'$, auringon korkeuskulma vähentynyt arvosta $35^\circ 30'$ arvoon $29^\circ 0'$ ja varjon pää piirtänyt kaaren, jonka jänteen pituus on 784 cm. Mikä on tangon korkeus ja millä tarkkuudella se em. arvoista saadaan, kun kulmamittausten tarkkuus on $15'$ ja pituusmittauksen 2 cm?

VASTAUS:

73.

Miten tarkkoja lukujen e ja π likiarvoja on käytettävä, jotta luvun a) $e\pi$, b) e^π virhe olisi < 0.005?

VASTAUS:

74.

Karttapaperi kutistuu x-akselin suunnassa 1 % ja y-akselin suunnassa 0.6 %. Arvioi kokonaisdifferentiaalia käyttäen, kuinka monta prosenttia on korjattava sellaista etäisyyttä, joka kutistuneella kartalla muodostaa 30 asteen kulman x-akselin kanssa? Montako astetta kulmaa on korjattava?

VASTAUS: 0.9 %, -0.1°.

2.4. Väliarvolause

75.

Olkoon $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Etsi väliarvolausessa mainittu piste (ξ,η), jolle pätee

$$f(x,y) - f(0,0) = f_x(\xi,\eta)x + f_y(\xi,\eta)y.$$

VASTAUS:

76.

Funktiot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olkoot differentioituvia alueessa $G \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos kaikilla $x \in G$ pätee

$$f_{x_k}(x) = g_{x_k}(x), \quad k = 1, \ldots, n,$$

niin on olemassa vakio C siten, että $f(x) = g(x) + C$ alueessa G.

VASTAUS:

2.5. Ketjusääntö

77.

Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{dw}{dt}$, kun

a) $w = xy + yz + zx, \quad x = e^t,\ y = 2t^2,\ z = e^{-t},$

b) $w = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad x = 2t,\ y = t^2,$

c) $w = \ln(x^2 + 3xy^2 + 4y^4), \quad x = 2t^2,\ y = 3t.$

VASTAUS:

78.

Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ ja $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, kun

a) $w = x\ln(x^2 + y^2), \quad x = s + t,\ y = s - t,$

b) $w = e^{x+2y}\sin(2x - y), \quad x = s^2 + 2t^2,\ y = 2s^2 - t^2.$

VASTAUS:

79.

Kappale kulkee pinnalla $F(x,y,z) = 0$ siten, että sen x- ja y-koordinaattien aikariippuvuus tunnetaan: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Lausu kappaleen nopeusvektori funktioiden F, x ja y derivaattojen avulla. Sovella tulosta tapaukseen, missä pinta on yksikkösäteinen pallo ja x- ja y-koordinaatit kasvavat aikaan verrannollisesti: $x(t) = y(t) = t$. Liike alkaa hetkellä $t = 0$. Hahmottele nopeusvektorin itseisarvon kuvaaja.

VASTAUS: Nopeusvektori $\mathbf{i} + \mathbf{j} - (F_x x' + F_y y')/F_z\,\mathbf{k}$; sovelluksessa $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t/\sqrt{1 - 2t^2}\,\mathbf{k}$.

80.

Olkoon $u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, missä $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on differentioituva funktio. Osoita, että lauseke $u_y \cos x + u_x \cos y$ on riippumaton funktiosta f.

VASTAUS: Lauseke on $\cos x \cos y$.

81.

Olkoot f ja g kaksi kahdesti derivoituvaa funktiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja olkoon $h(x,y) = f(xg(y))$. Laske funktion h toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

VASTAUS:

82.

Osoita, että funktio $z = \overline{\text{arc}}\tan \frac{x}{y}$, missä $x = u + v$, $y = u - v$, toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

VASTAUS:

83.

Kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio $f(x,t)$ toteuttaa *aaltoyhtälön*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Merkitään $u = x + ct$, $v = x - ct$, $f(x,t) = F(u,v)$. Etsi osittaisdifferentiaaliyhtälö funktiolle F.

VASTAUS:

84.

Olkoon $u(x,y)$ kahdesti jatkuvasti derivoituva reaaliarvoinen funktio, joka tasossa $\mathbb{R}^2$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Merkitään $x = s + t$, $y = s - t$ ja $u(x,y) = u(s+t, s-t) = U(s,t)$. Muunna osittaisdifferentiaaliyhtälö funktiota U koskevaksi ja ratkaise se. Millainen ratkaisu tästä saadaan alkuperäisen yhtälön tuntemattomalle funktiolle u ?

VASTAUS:

85.

Olkoon f koko xy-tasossa määritelty funktio ja olkoon tämän esitys napakoordinaattien avulla $f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = F(r,\varphi)$. a) Lausu funktion f osittaisderivaatat funktion F osittaisderivaattojen ja muuttujien r, φ avulla. b) Lausu funktion F osittaisderivaatat funktion f osittaisderivaattojen ja muuttujien x, y avulla.

VASTAUS:

86.

Lausutaan funktio $f(x,y)$ napakoordinaattien avulla:

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = F(r,\varphi).$$

Esitä lauseke

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

napakoordinaattien ja funktion F osittaisderivaattojen avulla.

VASTAUS: $(\frac{\partial F}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial F}{\partial \varphi})^2$.

87.

Suure S voidaan esittää sekä suorakulmaisten että napakoordinaattien avulla: $S=f(x,y)=F(r,\varphi)$. Se toteuttaa suorakulmaisten koordinaattien suhteen osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=1.$$

Millaisen napakoordinaattien suhteen muodostetun osittaisdifferentiaaliyhtälön se toteuttaa?

VASTAUS: $(\frac{\partial S}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial S}{\partial \varphi})^2=1$.

88.

Funktio $u(x,y)$ on tason $\mathbb{R}^2$ pisteissä määritelty skalaarikenttä; napakoordinaattien avulla lausuttuna tämä on $U(r,\varphi)$. Lausu napakoordinaateissa

$$\text{a) } x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y},\quad \text{b) } x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y},\quad \text{c) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

VASTAUS:

89.

Muunna osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2$$

napakoordinaatteihin. Merkitse tällöin $u(x,y)=U(r,\varphi)$. Millaisia ratkaisuja yhtälöllä on? Oletetaan lisäksi, että ratkaisufunktio saa xy-tason yksikköympyrällä arvot $u(x,y)=x$. Onko u tällöin jatkuva origossa?

VASTAUS: $u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+x/\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}$; ei ole jatkuva origossa.

90.

Funktio $f(x,y)$ toteuttaa alueessa $\{\,(x,y)\mid x>0,\ y>0\,\}$ osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lisäksi pätee $f(x,x)=x$, kun $x>0$. Muunna yhtälö sijoituksella $u=xy$, $v=y/x$ funktiota $F(u,v)=f(x,y)$ koskevaksi ja ratkaise $f(x,y)$. Onko funktiolla f raja-arvoa origossa?

VASTAUS: $\frac{\partial F}{\partial v}=0$, $f(x,y)=\sqrt{xy}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

91.

Olkoon skalaarikenttä u muotoa $u(x,y,z)=f(r)$, missä $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ja f on derivoituva. Kenttä toteuttakoon osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u.$$

Muunna tämä funktiota f koskevaksi differentiaaliyhtälöksi, jossa muuttujana on r. Ratkaise yhtälö. Minkälainen lauseke saadaan kentälle u?

VASTAUS:

92.

Olkoon f geometrisessa avaruudessa E^3 määritelty funktio: $f(\mathbf{r}) = f(x,y,z) = g(r)$, missä $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva yhden muuttujan funktio ja paikkavektorin $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ pituus on $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Funktio f riippuu siis vain origosta mitatusta etäisyydestä. Osoita:

$$\operatorname{grad} f = g'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\ .$$

VASTAUS:

93.

Funktio $f(x,y)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Olkoot $u = x^2 + y$ ja $v = x$ uudet muuttujat; siis $x = v$, $y = u - v^2$. Merkitään $f(x,y) = f(v, u - v^2) = F(u,v)$. Millaisen osittaisdifferentiaaliyhtälön toteuttaa funktio F?

VASTAUS: