3. Taylorin polynomi; funktion ääriarvot

3.1. Taylorin polynomi

94.

Kehitä funktio $f(x,y) = x^2y^3$ Taylorin polynomiksi kehityskeskuksena piste $(-1,2)$ a) laskemalla osittaisderivaatat, b) kirjoittamalla muuttujat muotoon $x = -1 + (x+1)$, $y = 2 + (y-2)$.

VASTAUS:

95.

Laske Taylorin polynomit seuraavissa tapauksissa:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } f(x,y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2,\ \text{keskus} = (0,0),\ \text{aste} = 3;\\
&\text{b) } f(x,y) = y^2 \ln x,\ \text{keskus} = (1,0),\ \text{aste} = 4;\\
&\text{c) } f(x,y) = \sqrt{x^3y},\ \text{keskus} = (1,3),\ \text{aste} = 4.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) $2xy^2 - 5y^3$; b) $(x-1)y^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2y^2$;
c) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{3}}{6}(y-3) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(x-1)(y-3) - \frac{\sqrt{3}}{72}(y-3)^2 -$
$\frac{\sqrt{3}}{16}(x-1)^3 + \frac{\sqrt{3}}{16}(x-1)^2(y-3) - \frac{\sqrt{3}}{48}(x-1)(y-3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{432}(y-3)^3 +$
$\frac{3\sqrt{3}}{128}(x-1)^4 - \frac{\sqrt{3}}{96}(x-1)^3(y-3) - \frac{\sqrt{3}}{192}(x-1)^2(y-3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{288}(x-1)(y-3)^3 - \frac{5\sqrt{3}}{10368}(y-3)^4$.

96.

Laske termin $(x+\pi)^2(y-\pi)^2$ kerroin funktion $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ tekijöiden $x+\pi$ ja $y-\pi$ mukaan etenevässä Taylorin kehitelmässä.

VASTAUS:

97.

Muodosta funktion e^{x+2y} toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(0,0)$ sekä Taylorin lauseen mukainen lauseke funktion ja polynomin erotukselle. Etsi erotuksen itseisarvolle yläraja neliössä $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

VASTAUS:

98.

Etsi funktion
$$f(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z}$$
kolmannen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(1,0,0)$ laskemalla kertoimet osittaisderivaattojen avulla.

VASTAUS:

99.

Etsi funktion
$$f(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z}$$
kolmannen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(1,0,0)$ käyttämällä hyväksi yhden muuttujan funktion $1/(1+t)$ Maclaurinin polynomia.

VASTAUS:

100.

Muodosta funktiolle

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{1+(x-1)+y+z}$$

neljännen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(1,0,0)$ käyttämällä hyväksi funktion $1/(1+t)$ Taylorin polynomia. Laske tämän avulla $f_{xyzz}(1,0,0)$.

VASTAUS:

101.

Muodosta funktion $f(x,y)=\sin(xy)$ kuudennen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(0,0)$ käyttämällä funktion $\sin t$ Taylorin polynomia. Laske tämän avulla kaikki funktion kuudennen kertaluvun osittaisderivaatat origossa.

VASTAUS:

102.

Muodosta funktiolle

$$f(x,y)=e^{xy}\sin y$$

kolmannen asteen Taylorin polynomi kehityskeskuksena origo käyttämällä yhden muuttujan funktioiden e^t ja $\sin t$ Maclaurinin polynomeja.

VASTAUS:

103.

Laske funktion $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$ osittaisderivaatta $f_{xxxxxxyy}(0,0)$ muodostamalla funktiolle riittävän korkeata astetta oleva Taylorin polynomi. Muodosta tätä varten ensin funktion $\ln(1+t)$ Taylorin polynomi.

VASTAUS: -1440.

104.

Yhtälö $x^2+2y^2+3z^2=6$ määrittelee eräässä pisteen $(1,1,1)$ ympäristössä funktion $z=f(x,y)$. Muodosta tämän funktion toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(1,1)$.

VASTAUS:

105.

Laske funktion $f(x,y,z)$ origokeskisen Taylorin polynomin neljännen asteen termien kertoimet. Vrt. näitä ns. *multinomikertoimiin*.

VASTAUS:

106.

Tarkastellaan funktiota $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ pisteen (x_0,y_0) ympäristössä. Merkitään $h=(x-x_0,y-y_0)=(h_x,h_y)$. Osoita, että jos tässä ympäristössä on voimassa

$$f(x,y)=A_0+A_1(h_x,h_y)+\cdots+A_n(h_x,h_y)+u(x,y)\|h\|^{n+1},$$
$$f(x,y)=B_0+B_1(h_x,h_y)+\cdots+B_n(h_x,h_y)+v(x,y)\|h\|^{n+1},$$

missä A_j ja B_j ovat astetta j olevia homogeenisia kahden muuttujan polynomeja ja funktiot u ja v ovat rajoitettuja, niin kehitelmät ovat identtiset.

VASTAUS:

3.2. Funktion suhteelliset ääriarvot

107.

Luokittele seuraavat neliömuodot:

$$\text{a) } 2x^2-7xy-15y^2, \quad \text{b) } 6xy-9x^2-y^2, \quad \text{c) } 4xy-2x^2-3y^2.$$

Missä neliömuodot ovat $=0$?

VASTAUS:

108.

Luokittele seuraavat neliömuodot:

$$\text{a) } 2x^2+2y^2+z^2-4xy+6yz, \quad \text{b) } x^2+2y^2+3z^2-2yz+2zx.$$

VASTAUS:

109.

Etsi funktion $f(x,y)=2xy-x^2-y^4$ lokaalit ääriarvot. Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS:

110.

Etsi seuraaville funktioille f ne pisteet, joissa grad $f=O$, ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

$$\text{a) } y^4+x^2-2xy, \qquad \text{b) } x^3+xy+y^2-3x-9y, \qquad \text{c) } x^4+y^4+4xy-2y^2,$$

$$\text{d) } (x+2y-2)(x-2)(y-1), \qquad \text{e) } \frac{xy}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}, \qquad \text{f) } (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

VASTAUS:

111.

Määritä funktion

$$f(x,y)=(x^2-y^2)e^{(-x^2-y^2)/2}$$

lokaalit ääriarvokohdat, näiden laatu sekä ääriarvot.

VASTAUS: Suhteellinen maksimi $f(\pm\sqrt{2},0)=2/e$, suhteellinen minimi $f(0,\pm\sqrt{2})=-2/e$.

112.

Millä vakion a arvoilla funktiolla

$$f(x,y)=e^{x^2}-2\cos y+axy$$

on suhteellinen minimikohta origossa?

VASTAUS:

113.

Tutki funktion $f(x,y)=x^3+3axy^2-3x^2-3y^2+4$ suhteellisia ääriarvokohtia vakion a eri arvoilla. Määritä ääriarvojen laatu neliömuotojen teoriaa käyttäen. Onnistutaanko tällöin kaikissa tapauksissa?

VASTAUS:

114.

Tutki, onko piste $(2,0)$ funktion

$$f(x,y) = x^3 + \tfrac{3}{2}xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

ääriarvopiste. Millainen tulos saadaan neliömuotojen teorian avulla? Piirrä pinnasta korkeuskäyräkuva.

VASTAUS:

115.

Tutki neliömuotoja käyttäen, onko origo suhteellinen ääriarvo funktiolle

$$f(x,y,z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - xy.$$

Jos on, onko kyseessä maksimi vai minimi?

VASTAUS:

116.

Tutki, onko origo suhteellinen ääriarvokohta funktiolle

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{5} (x^3 + xy^2)^k.$$

VASTAUS:

117.

Osoita, että funktiolla $f(x,y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$ ei ole ääriarvoa origossa, vaikka sen rajoittumalla jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on suhteellinen minimi.

VASTAUS: $f(x,kx) = 2x^4 - 3kx^3 + k^2x^2$, $f(0,y) = y^2$; funktio saa paraabelien $y = x^2$, $y = 2x^2$ välissä negatiivisia arvoja, muualla paraabelin ulkopuolella positiivisia.

3.3. Absoluuttiset ääriarvot

118.

Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

a) $xy + x - y, \quad \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x + y + 1 \ge 0,\ x - y - 1 \le 0\};$
b) $x^2 - 2y^2 - xy - x, \quad \{(x,y) \mid x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1\};$
c) $3 + x - x^2 - y^2, \quad \{(x,y) \mid 2x^2 + y^2 \le 1\};$
d) $y^2 - 2x^2, \quad \{(x,y) \mid x^2 - y \le 1,\ x + y \le 1\};$
e) $xy(a - x - y), \quad \{(x,y) \mid |x| \le a,\ |y| \le a\};$
f) $x^3 + y^3, \quad \{(x,y) \mid 0 \le xy \le 1,\ x^2 + y^2 \le 4\};$
g) $\sin x + \sin y - \sin(x+y), \quad \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\};$
h) $(x+y)e^y, \quad \{(x,y) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1\};$
i) $x\sin z + y\cos z, \quad \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$

VASTAUS: a) 1, $-\frac{1}{2} - \sqrt{2}$; b) $\frac{17}{8}$, -4; c) $\frac{13}{4}$, $\frac{7}{4}$; d) 2, -3; e) $3a^3$, $-a^3$; f) 8, -8; g) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 0; h) $2e$, -1; i) 1, -1.

119.

Määritä funktion

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$$

suuurin ja pienin arvo ympyrässä $x^2 + y^2 \le R^2$.

VASTAUS:

120.

Määritä funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2axy$ suurin ja pienin arvo ympyrässä $\{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\,\}$ kaikilla vakion a arvoilla.

VASTAUS:

121.

Paraboloidisegmentistä $x^2 + 4y^2 \le z \le 1$ sahataan suorakulmainen särmiö, jonka sivutahkot ovat koordinaattitasojen suuntaiset. Määritä tämän suurin mahdollinen tilavuus. Mitkä ovat tällöin särmiön mitat?

VASTAUS: $\max V = 1/4$; mitat 1, $1/2$, $1/2$.

122.

Suorakulmaisen särmiön sivutahkot ovat koordinaattitasojen suuntaiset ja se sijaitsee ellipsoidin $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ sisässä. Miten suuri voi särmiön tilavuus olla? Mitkä ovat tällöin sen särmien pituudet?

VASTAUS: $\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$; särmät $2a/\sqrt{3}$, $2b/\sqrt{3}$, $2c/\sqrt{3}$.

123.

Määritä funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

suurin ja pienin arvo joukossa

$$\text{a) } \{\,(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\,\}, \quad \text{b) } \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \ge 1\,\}, \quad \text{c) } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

mikäli nämä ovat olemassa.

VASTAUS: a) Ei ole; b) 1, -1; c) ei ole.

124.

Määritä funktion

$$\text{a) } f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}, \qquad \text{b) } f(x,y) = \frac{1 + 2x + 2y}{1 + x^2 + y^2}$$

suurin ja pienin arvo tasossa $\mathbb{R}^2$, mikäli nämä ovat olemassa.

VASTAUS:

125.

Osoita, että reaalilukujoukon

$$\{\,xye^{-x^2y} \mid x \ge 0,\ 0 \le y \le 1\,\}$$

maksimi on olemassa ja määritä se.

VASTAUS: Maksimi on $1/\sqrt{2e}$ pisteessä $(1/\sqrt{2}, 1)$.

126.

Tutki funktion $f(x,y) = xy^2(1-x)^y$ absoluuttista maksimia ja minimiä, kun $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$.

VASTAUS: Minimi $= 0$, maksimia ei ole (supremum $= \infty$).