6. Käänteiskuvaukset ja implisiittifunktiot

6.1. Käänteisfunktion olemassaolo

165.

Määritä jokin piste, jonka ympäristössä funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (y\sin x,\ x+y+1)$$

a) on lokaali käänteisfunktio, b) ei ole. Piirrä näiden pisteiden ympäristöön asetetun neliöruudukon kuva.

VASTAUS:

166.

Tutki, minkä pisteiden ympäristössä kuvauksella $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3+xy,\ x^2/10+y)$, on lokaali käänteiskuvaus. Tarkastele aluetta $\{\,(x,y) \mid -1.5 \le x \le 1.5,\ -1 \le y \le 1\,\}$ ja muodosta siihen piirretyn neliöruudukon kuva. Laske funktion f Jacobi'n determinantti. Missä pisteissä tämä on $= 0$? Miten nämä pisteet kuvautuvat?

VASTAUS:

167.

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ määritellään asettamalla $f(x,y) = ((x+y)^3+ax+ay,\ x-y)$. Tutki lokaalin käänteisfunktion olemassaoloa tapauksissa a) $a = 3$, b) $a = -3$. Selosta, miten funktio kuvaa xy-tason. Piirrä kuvia.

VASTAUS: a) Globaali ja siis myös lokaali käänteisfunktio on olemassa; b) lokaali käänteisfunktio on olemassa, jos $x+y \ne \pm 1$.

168.

Laske funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (x^3+y^3,\ x^3-y^3)$$

funktionaalideterminantti. Onko funktiolla globaalia käänteisfunktiota? Ratkaise (x,y) yhtälöstä $(u,v) = f(x,y)$.

VASTAUS: $\det(J_f(x,y)) = -18x^2y^2$; globaali käänteisfunktio on olemassa:
$g(u,v) = \left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(u+v)}, \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(u-v)}\right)$.

169.

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$, olkoon määritelty yhtälöillä

$$\begin{cases} y_1 = (x_1+x_2)^3, \\ y_2 = (x_1-x_2)^3. \end{cases}$$

Laske funktion f Jacobi'n matriisi (funktionaalimatriisi) pisteessä (x_1,x_2). Osoita, että funktiolla f on käänteisfunktio g ja määritä sen lauseke. Onko funktio g kaikkialla differentioituva? Määritä funktion g Jacobi'n matriisi pisteessä $(1,8)$.

VASTAUS:

170.

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (e^x\cos y,\ e^x\sin y).$$

Määritä suorakulmion $S = \{\,(x,y) \mid r_1 \le x \le r_2,\ 0 \le y \le 2\pi\,\}$ kuva $f(S)$ ja tutki, onko kuvaus $f : S \to f(S)$ injektio. Määritä suurin injektiivisesti kuvautuva origon ympyräympäristö.

VASTAUS:

171.

Kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (u,v) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y),$$

kuvaa pisteen $P \mathrel{\widehat{=}} (1,\pi/6)$ erään ympäristön pisteen $Q \mathrel{\widehat{=}} (e\sqrt{3}/2, e/2)$ eräälle ympäristölle bijektiivisesti, jolloin on olemassa lokaali käänteiskuvaus $x = g_1(u,v),\ y = g_2(u,v)$. Laske funktion $h(u,v) = g_1(u,v)g_2(u,v)$ osittaisderivaatat $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ ja $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ pisteessä Q.

VASTAUS: $\frac{\partial h}{\partial u} = (\pi\sqrt{3} - 6)/(12e)$, $\frac{\partial h}{\partial v} = (\pi + 6\sqrt{3})/(12e)$.

6.2. Implisiittifunktioista

172.

Osoita, että yhtälö $x^6 + 2y^4 - 3x^2 y = 0$ eräässä pisteen $(1,1)$ ympäristössä määrittelee funktion $y = f(x)$. Määritä funktion kuvaajan tangentin yhtälö kyseisessä pisteessä.

VASTAUS:

173.

Määritä Cartesiuksen lehden $x^3 + y^3 = 3xy$ kaarevuussäde niissä pisteissä, missä käyrä leikkaa suoran $y = x$.

VASTAUS:

174.

Yhtälö $F(cx - az, cy - bz) = 0$, missä F on differentioituva funktio sekä a, b ja c vakioita, määritelköön differentioituvan funktion $z = f(x,y)$. Laske $a f_x + b f_y$.

VASTAUS:

175.

Osoita, että yhtälö $\sin(yz) + y^2 e^z = x$ määrittelee eräässä pisteen $(\pi^2, \pi, 0)$ ympäristössä funktion $z = f(x,y)$. Arvioi differentiaalia käyttäen tämän funktion arvo pisteessä $(\pi^2 + 0.01,\ \pi - 0.03)$.

VASTAUS:

176.

Funktiot $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ja $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olkoot jatkuvasti derivoituvia. Oletetaan, että yhtälöllä

$$F(x,y,G(y,z)) = 0$$

on ratkaisu $z = f(x,y)$. Lausu f_x ja f_y funktioiden F ja G osittaisderivaattojen avulla.

VASTAUS:

177.

Oletetaan, että yhtälö $x = f(y,z)$ määrittelee funktion $z = g(x,y)$ ainakin jossakin tarkastelupisteen (x,y,z) ympäristössä. Lausu derivaatat g_x, g_y ja g_{xy} funktion f derivaattojen avulla. Oletetaan, että funktio f on riittävän monta kertaa differentioituva.

VASTAUS:

178.

Osoita, että yhtälö $x = z + y\sin z$ eräässä origon ympäristössä määrittelee funktion $z = g(x,y)$. Laske $g_{xy}(0,0)$.

VASTAUS:

179.

Osoita, että yhtälö $ye^x + \sin(x-y+z) = 0$ määrittelee eräässä origon ympäristössä pinnan. Määritä pinnan tangenttitaso origossa.

VASTAUS:

180.

Osoita, että yhtälöt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$$

($a,\ b,\ c > 0$) määrittävät käyrän pisteen $(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c}{\sqrt{2}})$ ympäristössä. Laske tähän pisteeseen asetetun käyrän tangentin ja z-akselin välisen kulman kosini.

VASTAUS:

181.

Laske funktion $f(x,y,z) = xy + \cos x + y^2 z$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ja gradientti pisteessä $(\pi/2, 1, -\pi/2)$. Mitä gradientti ilmaisee funktiosta f ? Entä pinnasta $f(x,y,z) = 0$? Mitä osittaisderivaattojen avulla voidaan päätellä siitä, määritteleekö yhtälö $f(x,y,z) = 0$ jossakin em. pisteen ympäristössä funktiot $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$, $z = z(x,y)$?

VASTAUS:

182.

Osoita implisiittifunktiolauseen avulla, että yhtälöt $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ ja $x^2 + 2y^2 - z = 0$ määrittävät pisteen $(-2,1,6)$ ympäristössä derivoituvat funktiot $y = f(x)$ ja $z = g(x)$. Laske näiden derivaatat pisteessä $x = -2$.

VASTAUS:

183.

Tutki, voidaanko yhtälöistä

$$x + y - z = 1 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 - 2z = 0$$

ratkaista funktiot $y = f(x)$ ja $z = g(x)$ sopivassa pisteen $(1,1,1)$ ympäristössä. Mikä on probleeman geometrinen sisältö?

VASTAUS: Ei voida; elliptinen paraboloidi ja sen tangenttitaso.

184.

Tutki sopivaa Jacobi'n determinanttia käyttäen, voidaanko yhtälöistä

$$x + y + z = 1 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ratkaista funktiot $y = f(x)$ ja $z = g(x)$ sopivassa pisteen $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),\ \frac{1}{4}(1-\sqrt{5}))$ ympäristössä. Mikä on probleeman geometrinen sisältö?

VASTAUS:

185.

Osoita, että yhtälöt

$$y^5 + xy + z^2 = 4 \quad \text{ja} \quad e^{xz} = y^2$$

määrittävät jossakin pisteen $(3,1,0)$ ympäristössä funktiot $x = f(z)$ ja $y = g(z)$. Laske $f'(0)$ ja $g'(0)$.

VASTAUS: $f'(0) = -12$, $g'(0) = \frac{3}{2}$.

186.

Olkoon f differentioituva funktio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja olkoon (a,b,c) piste, joka toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} f(f(x,y),z) = 0, \\ f(x, f(y,z)) = 0. \end{cases}$$

Millä funktion f osittaisderivaattoja koskevalla ehdolla yhtälöt implisiittifunktiolauseen mukaan määrittävät pisteen (a,b,c) ympäristössä funktiot $x = u(z)$ ja $y = v(z)$? Merkitse osittaisderivaattoja f_1 ja f_2 sekä merkitse myös niiden argumentit näkyviin.

VASTAUS:

187.

Piste $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p)$ toteuttakoon yhtälöryhmän

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p) = 0, \\ \qquad \vdots \\ f_p(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p) = 0. \end{cases}$$

Selosta, millä ehdolla ko. pisteen ympäristössä yhtälöistä voidaan periaatteessa ratkaista riippuvuus

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \qquad \vdots \\ y_p = g_p(x_1,\ldots,x_n). \end{cases}$$

Sovella teoriaa yhtälöihin $x^2 + y_1^2 - 2y_2 = 0$, $x + y_1 - y_2 - 1 = 0$ pisteen $(1,1,1)$ ympäristössä.

VASTAUS:

188.

Oletetaan, että yhtälö $F(x,y,z) = 0$ määrittää tarkastelupisteen (x_0,y_0,z_0) eräässä ympäristössä funktiot $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$ ja $z = z(x,y)$. Todista termodynamiikassa tarvittava yhtälö

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

VASTAUS:

189.

Totea edellisen tehtävän yhtälön

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

voimassaolo tapauksessa $F(x,y,z) = x^3y^2z - 1$, ts. muodosta funktiot x, y, z, laske näistä tarvittavat osittaisderivaatat ja niiden tulo.

VASTAUS:

6.3. Sidotut ääriarvot

190.

Etsi pisteen $(a,0)$ lyhin etäisyys paraabelista $y^2 = 4x$ käyttämällä Lagrangen kertoimia.

VASTAUS:

191.

Etsi origon lyhin etäisyys hyperbelistä $x^2 + 8xy + 7y^2 = 45$ käyttäen Lagrangen kertoimia.

VASTAUS: $\sqrt{5}$.

192.

Määritä origon suurin ja pienin etäisyys käyrästä

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1.$$

VASTAUS:

193.

Määritä se ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ensimmäisessä neljänneksessä oleva piste, johon asetettu tangentti muodostaa koordinaattiakseleiden kanssa mahdollisimman pienialaisen kolmion.

VASTAUS:

194.

Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Etsi suurin arvo lausekkeelle $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

VASTAUS:

195.

Puolisuunnikkaan sivut b ja d ovat yhdensuuntaiset, sivut a ja c yhtä pitkät; puolisuunnikkaan ala on annettu. Määritä suhde $a:b:c:d$ siten, että summa $a+b+c$ on mahdollisimman pieni.

VASTAUS:

196.

Pisteen $P \,\widehat{=}\, (a,b,c)$ kaikki koordinaatit ovat positiivisia. Määritä pisteen kautta kulkevan tason ja kaikkien koordinaattitasojen rajoittaman tetraedrin pienin mahdollinen tilavuus.

VASTAUS:

197.

Suuntaissärmiön särmien pituuksien summa olkoon $12a$. Määritä särmiön suurin mahdollinen tilavuus.

VASTAUS:

198.

Halutaan rakentaa suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko, jonka tilavuus a^3 on annettu. Laatikon pohja ja sivuseinät ovat puuta ja kansi lasia. Kuinka särmien pituudet on valittava, jotta hinta olisi mahdollisimman alhainen, kun lasi on kaksi kertaa niin kallista kuin puu?

VASTAUS:

199.

Määritä funktion $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ suurin ja pienin arvo tason $x + y + z = 3$ ja pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ leikkausympyrällä.

VASTAUS: Maksimi 123, minimi 27.

200.

Määritä Lagrangen kertojaa käyttäen funktion $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \ldots x_n)^2$ suurin arvo yksikköpallolla $x_1^2 + \ldots x_n^2 = 1$. Päättele tuloksesta aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välinen epäyhtälö $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, missä $a_k \geq 0$.

VASTAUS: $1/n^n$. Merkitse $x_k^2 = a_k/(a_1 + \cdots + a_n)$.

201.

Etsi lausekkeen $\sum_{k=1}^{n} x_k^p$ ääriarvot, kun side-ehtona on $\sum_{k=1}^{n} x_k = a$.

VASTAUS:

202.

Määritä funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo käyrällä $x^3 + y^3 = 3xy$.

VASTAUS:

203.

Määritä funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ suurin ja pienin arvo pallon $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y = 10$ ja lieriön $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$ leikkauskäyrällä.

VASTAUS:

204.

Määritä funktion $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ suurin ja pienin arvo pallon $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y = 10$ ja lieriön $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$ leikkauskäyrällä.

VASTAUS: